



Matematiken, tillämpningarna och undervisningen

Man brukar tala litet slentrianmässigt om ren och tillämpad matematik beroende på om de problem man vill behandla är konstruerade för matematikens inre sammanhang eller kommer från något yttre. Jag vill försöka övertyga Er att det är mycket viktigt att noga tänka igenom skillnaderna. En sådan analys påverkar i hög grad hur undervisningen bör bedrivas, både i skolan och på universitetsnivå. Men låt oss börja från början, riktigt från början.

Människans hjärna har utvecklats så att den givit oss två fundamentala fördelar gentemot de andra djuren. Den första, som jag inte vidare skall behandla, gäller socialt beteende och kommunikation. Det viktigaste är kanske språket och möjligheten att föra kunskap vidare från generation till generation. Den andra fördelen är möjligheten att förstå naturen kring oss, att förutse vad som skall hända. Det språk som vi använder för detta är matematiken. Det är ju ett av tillvarons mysterier att dessa lagbundenheter existerar och att de speglas i vår hjärna. Genom att tänka kan vi förutse var den kastade stenen hamnar, var den kortaste vägen går, hur man hittar det man letar efter på internet.

Under årtusenden har olika grenar av matematiken byggts upp. Helt säkert började allt med talen, på skilda sätt men

ändå likartat i västerlandet, i orienten och i Kina. En stor stötesten var representation av tal. Den grekiska matematiken lyckades aldrig med detta och det var först när den arabiska metoden med positionssystemet nådde Europa som matematiken tog fart.

Geometri var specialiteten i antikens Grekland och tal uttrycktes som sträckor och kvoter som delning av sträckor. Det finns en passus hos Platon som behandlar irrationella tal. Man vill visa att $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ etc ej är rationella och konstruera geometriska rekursioner som man visar aldrig slutar. Det fungerar tills man kommer till 19. Man kan undra varför de slutade där? Det visar sig att konstruktionen innehåller så stora tal att men inte kan rita detta i sanden!

Vi vet också att grekerna hade stora tankeproblem med kontinuerliga tidsförlopp. Ni har säkert hört historien om Akilles och sköldpaddan. De springer i kapp och sköldpaddan får starta med ett försprång. Akilles kommer aldrig förbi sköldpaddan trots att han springer snabbare. Varje gång han kommer till sköldpaddans läge, har denna flyttat sig ytterligare en bit. Vad är fel i resonemang-
et? En framgångsrik metod att analysera rörelse kom först på 1600-talet med Newton-Leibnitz differential- och integralkalkyl. En förståelse av paradoxen i Akilles och sköldpaddan kom först på 1800-talet då man konstruerade ett stringent talbegrepp.

Denna utveckling fortsätter och under rens gång har otaliga områden fått sin matematiska teori. Låt mig räkna upp några. Sannolikhetskalkyl skapades för spel av olika slag under 1600-talet och blev ju grunden för all statistisk analys. Fysikaliska teorier av alla slag: från teoretiska som relativitetsteori och kvantmekanik till praktiska som meteorologi och elektronik. Biologi och medicin utnyttjar matematiska modeller och apparatur som är baserad på matematisk teori. Tillsammans utgör detta tillämpad matematik.

Vad är då matematik? Vi kan igen gå tillbaka till antiken. När Euklides cirka 400 fKr skrev sina böcker om geometri, ville han härleda de geometriska resultaten ur vissa grundläggande antaganden, axiom, utan någon referens till geometrisk intuition. Det är en imponerande prestation att han förutsåg att parallellaxiomet – att man genom en punkt utanför en linje kan konstruera en entydig linje som inte skär den givna linjen – inte följer ur de andra axiomen. Detta bevisades först på 1800-talet. Denna uppbyggnad av matematiken som logiska slutsatser ur givna förutsättningar är fortfarande mönsterbildande. Värderingen ligger i hur oväntade de upptäckta sambanden är, och hur komplicerade *bevisen*. På vägen behöver begrepp få klara och fullständiga *definitioner*. Dessa två ord: bevis och definition är den rena matematikens livsluft.

Det är uppenbart att den tillämpade matematiken har ett avgörande inflytande på den rena. Euklides val av axiom är naturligtvis ett försök att spegla vår föreställning om rätta linjer och punkter. Men "rät linje" kan tex också tolkas som storcirkel på en sfär, axiomen gäller även då, med undantag för parallellaxiomet. I denna geometri skär två rätta linjer alltid varandra. På liknande sätt kan vi axiomatisera hela tal och reella tal. Det sista är komplicerat och förklarar grekernas svårigheter med kontinuerliga tidsförlopp. Givetvis bekymrar vi oss i praktiken inte om dessa axiom när vi arbetar som rena matematiker. Vad vi gör, emellertid, är att bygga på de modeller vi skapat från naturen med egna definitioner. Ett belysande exempel är geometrin. I naturen finns 3 dimensioner. En punkt x kan beskrivas med tre koordinater $x = (x_1, x_2, x_3)$. Avståndet mellan x och y är $((x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2)^{1/2}$.

Men varför inte studera n koordinater? Varför inte byta 2 i avståndsformeln mot ett tal p , $1 < p < \infty$? Detta är ett typiskt matematiskt sätta att arbeta.

Matematiken förekommer

Ovan antyds alltså hur verkliga fenomen inspirerar matematiken och hur matematiken sedan utvecklas vidare. Finns det då någon återkoppling från ren till tillämpad matematik? Ja, och att det är så är ett av de djupa mysterierna i tillvaron. Låt mig erinra om standardexemplen. Riemann utarbetade en allmän teori för ytor i n dimensioner i mitten av 1800-talet. Han hade allmänna avståndsformler. Då Einstein i början av 1900-talet byggde upp relativitetsteorin använde han tiden som en fjärde dimension med den skillnaden att tiden i formlerna var rent imaginär så att avståndsformeln innehåller ett minus. Han kunde sedan bygga på Riemanns och andras arbeten. På liknande sätt kunde Heisenberg och Schrödinger bygga kvantmekaniken på existerande matematiska teorier, i Heisenbergs fall matristeori. Legenden säger att Heisenberg en gång gick fel och hamnade på en föreläsning om matriser och så fick inspiration. Låt mig ta ett par ytterligare exempel. Tomografi bygger på att man sänder en röntgenstråle (eller någon sorts stråle) genom en kropp (människlig hjärna tex) i alla riktningar och ser hur mycket som absorberas. Ur alla dessa data kan man räkna ut hur kroppen ser ut inuti. Det motsvarar att beräkna en funktion i 3 variabler ur dess integral över alla linjer. Detta problem löstes av Radon ungefär 50 år tidigare. Eller tänk på sökmotorn Google, där man vill hitta rätt referens ur ett antal sökord. Googles konstruktörer, ett par studenter vid Stanford, erinrade sig sina kurser i lineär programmering för att lösa det problemet.

Det finns även ett djupare samband mellan den rena matematiken och hur vår värld fungerar. Det är detta som man brukar referera till som "the unreasonable efficiency of mathematics" i fysik (efter en artikel av Eugen Wigner). Härmed avses att om man finner en modell som är matematiskt enkel och vacker och på ett ungefär beskriver ett naturfenomen, så stämmer modellen

1000-falt mer exakt än man vid aktuell-tidpunkt kan mäta. Det mest kända exemplet här är Newtons gravitationsmodell.

Det är värt att notera att för många matematiska problemområden kom en egentlig teori först under min livstid. Naturliga frågeställningar som tex ett problems mätbara svårighetsgrad saknar fortfarande en teori. Det gäller tex hur svårt det är att faktorisera stora heltal som länge var grunden för vissa krypteringssystem.

Värderad matematik

Vi har alltså två sorters matematik. Dvs matematiken är densamma men värderingen är helt olika. I den tillämpade matematiken används metoder som utnyttjar tillgänglig matematisk teori men värderingen av det som produceras avgörs av hur resultatet stämmer med experiment och hur intressanta resultaten är för aktuellt område. I den rena matematiken gäller värderingarna enkelhet och fullständig stringens, man kan säga skönhet. Det man här konstruerat är utan tvekan mänsklighetens mest imponerande tankekonstruktion, av evig hållbarhet. Det finns naturligtvis ett gränsskikt. Klassiskt kallas det numerisk analys och här studeras metoder för beräkning. Hit hör också olika områden för studier av datorer och komplexitet som jag tidigare nämnt.

Vilken sorts matematik bör då undervisas? När man tänker på hur skol- och universitetskurser utvecklats, inser man att våra pedagoger inte tänkt i termer av ren och tillämpad matematik. Från antiken har vi idealet om geometrins betydelse och tankens klarhet. Även kägelsnittet, efter Cartesius andragsgradskurvor, hörde till bildningsidealet. En likartad värdering gällde latinet. Det var länge de lärdes språk och internationellt användbart, men sedan 1800-talet mer ett bildningsideal. Jag vill gärna tro att dessa ämnen också tjänade som träningsarena för den klara tanken. På 1800-talet gick differentialkalkylen på segertåg genom naturvetenskapen och nådde även skolan och nu blev paniken nära när Δx gick mot noll (blev det någonsin noll?).

När intagningen till gymnasier och universitet breddades började den stora nedskärningen. Man gav först upp Euklides.

Det är kanske inte så mycket att beklaga, eftersom en riktig behandling är alldeles för komplicerad och en ytlig är alldeles för torftig. Man ser här tydligt konflikten mellan de två målsättningarna: att förmedla något praktiskt användbart och att göra riktiga definitioner och bevis. Samma utveckling har skett beträffande differential- och integralkalkyl. I och med att bevis och definitioner försvunnit har det återstående blivit torftigt och man har lagt till nya moment. I praktiken kan man säga att all ren matematik försvunnit både från skolkurser och grundutbildning vid universiteten. Vad som undervisas är emellertid inte en optimal kurs i tillämpad matematik utan det som blivit kvar efter devalveringar och vissa tillägg i samma anda. Geometri har tex nästan helt försvunnit.

Hur borde då matematikundervisningen i gymnasieskolan organiseras? Det finns enligt min mening två principer:

- ◇ Undervisningen bör inriktas mot användbar matematik där alltså resultaten av beräkningar och dessas mening är det väsentliga. Eftersom det finns maskiner som utför beräkningar bör dessa användas. Detta borde även gälla kurvritning och algebra. Den pedagogiska frågan gäller hur mycket förståelse av den tekniska matematiken som krävs för att man skall förstå svaren. Min personliga tro är att ett stort antal exempel och lång övning på problemlösning är mycket effektivare än långa förklaringar. Man kan jämföra med att lära sig gå. Teoretiska utläggningar tjänar här inte mycket till. Helt nya moment bör tillkomma som illustrerar matematik i dagens samhälle. Tex tröghetsnavigering, GPS-systemet, sökning på internet. Geometri bör förekomma.
- ◇ Ren matematik bör återinföras, dvs någon lämplig matematisk teori bör genomlysas. Man kunde tänka sig någon talteori, kanske någon topologi. Den gamla idén att matematiken befrämjar tankereda och logiskt tänkande borde ha sin plats i all utbildning och matematisk problemlösning är roligt!

Lennart Carleson