Kan elever hitta på egna skriftliga beräkningsmetoder?

Rolf Hedrén

I artikeln beskrivs ett forskningsprojekt, där elever under de fem första skolåren inte blev undervisade om standardalgoritmerna för de fyra räknesätten. Istället fick de tillfälle att själva uppfinna sina beräkningsmetoder. Exempel ges på metoder, som eleverna använde, men också på svårigheter, som de råkade ut för. Slutligen görs en sammanfattning av resultaten följd av författarens funderingar kring införande av standardalgoritmerna i matematikundervisningen.

Är det nödvändigt att en elev kan räkna ut subtraktionen 503 - 287 med följande standardalgoritm?

$$\begin{array}{r} 1\cancel{0}10 \\ \cancel{5}03 \\ -287 \\ \hline 216 \end{array}$$

Är det bättre att hon/han räknar ut uppgiften på följande sätt? 287 plus 13 är 300, 300 + 200 är 500, och 500 plus 3 är 503. Jag måste lägga på 13 plus 200 plus 3 för att komma från 287 till 503. Alltså är svaret 216. Är det tillräckligt att hon kan räkna på det sättet eller på något annat sätt, som hon kommit på på egen hand? Hur viktigt är det att eleverna själva får tillfälle att fundera på hur de ska göra beräkningar? Hur viktigt är det att de får lära sig standardalgoritmerna för de fyra räknesätten?

För att försöka få ett svar på dessa frågor har jag lett ett forskningsprojekt, där eleverna inte blev undervisade om standardalgoritmerna under de första fem skolåren. De fick i stället tillfälle att uppfinna sina egna muntliga eller skriftliga beräkningsmetoder. Studien omfattar endast räkning med naturliga tal.

Rolf Hedrén *är pensionerad lärarutbildare och biträdande professor i matematikdidaktik vid Högskolan Dalarna.*

Behöver vi kunna räkna?

Många beräkningar sker ju i dag med hjälp av elektroniska räknehjälpmedel, miniräknare och datorer. Detta ger oss enligt min åsikt anledning att fundera över vilka kunskaper, som kommer att bli viktiga för våra elever i dagens och morgondagens samhälle. Kanske kommer det inte att vara så väsentligt för framtidens vuxna medborgare att kunna utföra beräkningar snabbt och säkert med papper och penna. I stället kommer troligen huvud- och överslagsräkning att vara ännu viktigare kunskaper än i dag. Det är ju lätt att trycka på fel knapp på miniräknaren, att missförstå miniräknarens sätt att fungera eller att använda ett felaktigt datorprogram. Därför är det och kommer det att vara viktigt att människan själv kan avgöra om ett resultat, som hon får fram med hjälp av ett räknetekniskt hjälpmedel är rimligt eller inte.
För att kunna göra vettiga huvud- och överslagsberäkningar liksom för att kunna göra en rimlighetsbedömning måste vi ha en god förståelse för och uppfattning av tal och

samband mellan tal, något som på engelska kallas ”number sense” och som jag i fortsättningen helt enkelt kommer att beteckna med ”taluppfattning”. Frågan är hur vi bäst låter eleverna träna upp sin taluppfattning och sin förmåga till huvud- och överslagsräkning.

Det kan också vara skäl att i detta sammanhang titta på vad vår nuvarande kursplan säger om beräkningar. I mål som eleverna kall ha uppnått i matematik i slutet av det femte skolåret, står det t ex

> *Eleven skall*
> *…ha grundläggande färdigheter i att räkna med naturliga tal - i huvudet, med hjälp av skriftliga räknemetoder och med miniräknare …*

Även för målen efter det nionde skolåret finns liknande formuleringar. Skriftliga räknemetoder kan inte jag tolka på något annat sätt än att det är fritt för eleven att välja den metod för skriftliga beräkningar, som hon/han känner hjälper henne bäst.

Filosofi kring lärande

En stor del av den matematikdidaktiska forskningen i dag vilar på den filosofi för lärande som kallas social konstruktivism. Den hävdar bl a

- att en elev aktivt konstruerar sin kunskap,
- att tidigare erfarenheter och kunskaper har stor betydelse för eleven vid denna konstruktion.
- att eleven konstruerar sin kunskap i samverkan med andra och
- att därvid både det vardagliga och det matematiska språket spelar en stor roll.

(Se t ex Ernest, 1991, Ernest 1998; von Glaserfeld, 1998.)

Detta sätt att se på lärande har också spelat en stor roll för försökets uppläggning. En uppläggning av elevens studier, där hon får tillfälle att själv eller i samverkan med sina kamrater få uppfinna metoder för huvudräkning eller skriftlig beräkning, ligger enligt min uppfattning närmare den sociala konstruktivismen än en uppläggning med utlärande av standardalgoritmer gör.

Ett försök

Försöket genomfördes i en klass, som jag följde från det att eleverna gick sin andra termin i skolår 2 till och med det år, då de gick skolår 5. Eleverna hade inte blivit undervisade om standardalgoritmerna före försöket, och de fick heller ingen undervisning om dem under försökets gång. Inga speciella andra räknemetoder lärdes heller ut. Däremot diskuterades de metoder, som eleverna själva kom fram till, i grupp eller i hel klass. Dessutom uppmanades elevernas föräldrar att hjälpa sina barn att hitta alternativa metoder men att inte lära dem standardalgoritmerna.

Eleverna fick i allmänhet välja om de ville räkna ut en uppgift i huvudet eller göra längre eller kortare stödanteckningar vid beräkningen. De uppmuntrades också att göra överslagsräkning på sådana uppgifter, där det kunde anses lämpligt. De hade miniräknare i sina bänkar, som framför allt i början användes till talexperiment och senare för kontroll av beräkningar och för mer komplicerade uträkningar. Användning av miniräknare spelade dock inte någon huvudroll i försöket. Med undantag av vad som ovan sagts följde undervisningen en traditionell uppläggning, och klassens lärare skötte all undervisning. Som läromedel användes under fjärde och femte skolåren Birgitta Rockströms bok *Matteboken*, som är upplagd med tanke på att eleverna ska kunna arbeta med det Birgitta kallar ”skriftlig huvudräkning”.
På uppmaning av några elevföräldrar gick läraren igenom standardalgoritmerna under det sjätte skolåret. Jag gjorde också en mindre uppföljning av försöket under detta skolår.

Jag följde försöket med hjälp av huvudsakligen kvalitativa undersökningsmetoder:

Kliniska intervjuer
Observationer
Kopior av eleverna beräkningar i samband med observationer
Vanliga elevintervjuer
Lärarintervjuer och veckovisa samtal med läraren.

Dessa metoder kompletterades med test och enkäter.

Intervjuer

Till de kliniska intervjuerna, då eleverna fick ett antal uppgifter att räkna och i samband med detta ombads redogöra för sina tankegångar, togs tre flickor och tre pojkar ut, som låg på varierande prestationsnivåer i matematik. Vid observationerna samlade jag 2 till 4 elever i ett särskilt grupprum. Även då fick eleverna ett antal uppgifter att lösa, men de hade möjlighet att samarbeta kring lösningarna. Även vid observationerna försökte jag ta reda på hur eleverna resonerade för att klara av beräkningarna. Vid samtliga tillfällen spelades samtalen in på band.

Vid de vanliga intervjuerna med eleverna ställde jag bland annat frågor om deras motivation för matematik, om deras inställning till att använda miniräknare i matematikundervisningen och till att hitta på sina egna beräkningsmetoder i stället för att få dem förelagda av någon annan. Intervjuerna gjordes med samma elever, som tagits ut till de kliniska intervjuerna. I stort sett samma frågor återkom i enkäterna, som delades ut till samtliga elever i klassen. Läraren tillfrågades bland annat om sin syn på att lägga upp undervisningen utan införande av standardalgoritmer och sin bedömning av elevernas framsteg och svårigheter.

Min huvudfråga var: *Vad händer när elever ges möjlighet att finna på egna metoder för skriftliga och muntliga beräkningar utan att standardalgoritmerna lärs ut?* Speciellt ville jag titta på hur elevernas taluppfattning och deras förmåga till huvud- och överslagsräkning påverkades.

Några resultat

Jag kommer här att koncentrera mig på några av de resultat, som jag anser mig ha kommit fram till i mitt försök:

- Några olika metoder, som eleverna använde i de olika räknesätten.
- Speciella svårigheter, som eleverna stötte på.
- Vad hände under det sjätte skolåret?

Först vill jag i korthet visa hur eleverna löste uppgifter inom de olika räknesätten. Eftersom metoderna, som jag tidigare påpekat, inte skilde sig särskilt mycket åt, när eleverna skrev ned stödanteckningar och när eleverna räknade helt i huvudet, kommer jag att blanda de båda typerna av lösningar.

Addition

I addition löste eleverna oftast uppgifterna genom att dela upp i hundratal, tiotal och ental. En flicka skrev t ex ned lösningen av 238 + 177 på följande sätt på höstterminen i skolår 4:

200 + 100 = 300; 30 + 70 = 100;
7 + 8 = 15; 238 + 177 = 415.

En pojke visade på ett annat sätt att lösa en liknande uppgift under samma termin. Han tittade mer på de ingående talen som helheter och såg efter hur han kunde förenkla sina beräkningar med just dessa tal:

157 + 66; 150 + 50 = 200;
10 + 6 + 7 = 23; 200 + 23 = 223.

På hans papper stod emellertid bara 200 + 23 = 223, övriga tankegångar redogjorde pojken för muntligt.

Subtraktion

Även i subtraktion använde sig många elever av en uppdelning enligt positionssystemet. Detta är ett typiskt exempel:

535 – 269; 500 – 200 = 300;
30 – 60 = - 30; 5 – 9 = – 4;
300 – 30 = 270; 270 – 4 = 266.

Uppgiften löstes av en flicka på höstterminen i skolår 5. Det är intressant att se hur hon därvid utnyttjade negativa tal på ett skickligt sätt.

En pojke löste redan på höstterminen i skolår 4 en liknande uppgift i huvudet på ett något annorlunda vis:

147 – 58; 58 – 47 = 11; 100 – 11 = 89.

Denna pojke nämnde inte ordet ”negativ”, man han visade att han kunde använda begreppet.

En annan pojke visade ungefär samtidigt ett annat sätt att klara tiotals- och hundratalsövergångarna i ovanstående uppgift:

140 – 50 = 90; 90 + 7 = 97; 97 – 8 = 89.

Han gjorde uträkningen i huvudet och förklarade att han inte kunde räkna ut 7 minus 8 men däremot 97 minus 8.

Även en kompensationsmetod kom till användning. En pojke skrev under samma termin ned sin lösning till uppgiften 189 - 115 på följande sätt:

189 – 115 = 89 – 15 = 79 – 5 = 74.

Multiplikation

I multiplikation kunde två huvudvarianter urskiljas, ”upprepad addition” och ”användning av distributiva lagen”. Som vi kommer att se, försökte dock eleverna även vid den första varianten att ordna sina uträkningar på ett så fördelaktigt sätt som möjligt.

En pojke löste på höstterminen i skolår 5 uppgiften 5 · 44 genom att skriva

88 + 88 + 44 = 160 + 16 + 44 =
200 + 20 = 220.

Vi ser hur han studerade de ingående talen i additionen för att göra uträkningarna så enkla som möjligt.

Uppgiften 6 · 321 löstes av en flicka under samma termin på detta sätt:

6 · 300 = 1800; 6 · 20 = 120; 6 · 1 = 6.
Svaret blev 1926.

Division

I division förekom tre olika huvudvarianter, som jag har kallat ”addition av delar”, ”prövning fram till rätta svaret” samt ”division av delar”. Jag kommer av skrivtekniska skäl att skriva snedstreck (/) i stället för bråkstreck (—). I arbetet i klassen använde jag däremot alltid och eleverna med något undantag bråkstreck för att beteckna division.

En flicka skrev på hösten i skolår 5 ned lösningen till uppgiften 316 / 4 så här:

<table>
<tr><td>50</td><td>50</td><td>50</td><td>50</td><td>220</td></tr>
<tr><td>5</td><td>5</td><td>5</td><td>5</td><td>240</td></tr>
<tr><td>5</td><td>5</td><td>5</td><td>5</td><td>260</td></tr>
<tr><td>5</td><td>5</td><td>5</td><td>5</td><td>280</td></tr>
<tr><td>5</td><td>5</td><td>5</td><td>5</td><td>300</td></tr>
<tr><td>5</td><td>5</td><td>5</td><td>5</td><td></td></tr>
<tr><td>||||</td><td>||||</td><td>||||</td><td>||||</td><td></td></tr>
</table>

Metoden, som jag hänför till ”addition av delar”, kan förefalla primitiv, men jag anser att den visar på en god förståelse för divisionsbegreppet. Som synes följer inte de tal, som står längst till höger, de kumulativa summorna på motsvarande rader, men det går ändå lätt att följa hennes tankegång. (Talet 200 står på annat ställe i uträkningen.) Svaret blev 79.

Ett mer konkret sätt att använda samma variant beskrev en pojke under samma termin, när han löste uppgiften 123 / 3: Först tog jag tre tjugolappar, då får de 20 var. Då tog jag en till, då blir det 120. Då får de 40 kronor var, och så ska de dela på 3, då bli, då får de 41 kronor var.” Det är intressant att se den roll, som våra nuvarande sedlar spelade för honom.

En ”prövning fram till rätta svaret” visas i följande lösning till 316 / 4, som skrevs ned av en flicka under samma termin:

70 + 70 = 140 140 + 140 = 280
76 + 76 = 152 152 + 152 = 304
79 + 79 = 158 158 + 158 = 316

Jag kunde inte låta bli att fråga henne varför hon började med att pröva talet 70. Hon svarade att kvoten måste bli ett tal under 100.

Kanske kan man dock säga att ”division av delar” är den mest avancerade av de metoder, som visats här. Ett exempel på en sådan lösning visade en flicka i slutet av höstterminen i skolår 5, när hon skulle beräkna 128 / 8. Efter att förgäves ha försökt räkna ut 100 / 8, hittade hon 120 / 8 = 15 och kunde sedan fortsätta med 8 / 8 = 1 och ge svaret 1 + 15 = 16.

Några svårigheter

Tyvärr gick det inte alltid friktionsfritt för eleverna att lösa de förelagda uppgifterna. Jag tycker därför att det är viktigt att visa på några speciella svårigheter, som försöksklassens elever råkade ut för i de olika räknesätten.

Inte oväntat var addition det räknesätt, som vållade eleverna minst bekymmer. I början kunde dock tiotalsövergångar vålla vissa svårigheter. Jag vill belysa detta genom följande episod, som utspelade sig på vårterminen under skolår 2. Tre flickor, som vi kan kalla Doris, Janet och Britta skulle lösa uppgiften ”Per har 49 kr. Nils har 22 kr. Hur mycket pengar har pojkarna tillsammans?” Både Doris och Janet fick svaret 61, vilket Janet förklarade på följande sätt.

Jag tycker att det är nästan samma sak, men, eftersom, jag tänkte i början, då tänkte jag på samma sätt, det blir ju 6, det där, och sen 9 plus 2, då blir ju 11, men då tar man bara bort ettan i början, så blir det 60.

Britta kom dock så småningom på en bättre lösning. *Obs* står för observatören.

Britta: Jo, jag skrev så hära (ohörbart), 49 plus 22, det blir 71 (otydligt).
Obs : Du svarar, du svarar 71, men det är, dom andra flickorna har fått 61. Hur kan du få 71, Britta?
Britta:Jag tänkte så här, 11, det står ju så här att 9 plus 2, det kan man inte lägga ihop med nån sexa, då borde det ju bli nånting med 70, då måste man ju lägga 71.
Obs:Kan du förklara bättre varför det måste bli nånting med 70?
Britta:Jo man kan ju inte fortsätta med så här, äh, sextitio, sextitolv eller sex tielva så där, det kan man inte göra, då måste man ju börja på 70, sen 71.

Även i subtraktion var det tiotals- liksom hundratalsövergångar, som vållade eleverna besvär. Vi såg tidigare hur en del elever lyckades klara av detta, men alla var inte lika framgångsrika.

Det vanligaste felet illustreras genom följande exempel. Två flickor skulle räkna ut 514 – 237 på vårterminen i skolår 3 och skrev ned sina lösningar på följande sätt :

500 – 200 = 300; 10 – 30 = 20; 4 – 7 = 3,

varefter svaret blev 323.

En annan elev gav på höstterminen i skolår 4 exempel på en annan variant:

53 – 27; 50 – 20 = 30; 3 – 7 = 0.

Svaret blev 30.

När det gäller multiplikation förvånade det mig en aning att så många elever använde sig av upprepad addition i stället för att använda den distributiva lagen enligt ovan. Det föreföll som om eleverna, trots att de kunde multiplikationstabellen relativt bra, inte hade den så väl befäst att det blev naturligt för dem att använda den även vid multiplikation av tiotal och hundratal.

Ännu svårare blev det för eleverna, när de någon gång skulle lösa uppgifter med två tvåsiffriga faktorer. För att beräkna exempelvis 12 · 23 med hjälp av distributiva lagen, måste man ju dela upp faktorerna i 10 + 2 respektive 20 + 3, och man får alltså fyra produkter. Många elever hoppade över någon eller några av dessa och fick därigenom felaktigt svar.

Division var inte oväntat det räknesätt, som vållade flest svårigheter. Eleverna hade ju blivit vana vid att dela upp talen i hundratal, tiotal och ental, men det är inte alltid så fördelaktigt vid division. Ett exempel gav en flicka på vårterminen i skolår 4, då hon skulle dividera 236 med 4. Hon hittade snabbt att 200 dividerat med 4 är

50, men sedan blev det stopp, när hon kom till 30 dividerat med 4. Det var inte lätt för henne att inse att det gick lättare, om hon i stället dividerade 36 med 4.

Problemet vid division kan man givetvis komma ifrån genom att visa eleverna på kort division. Enligt min åsikt har man emellertid då givit dem en algoritm, som är lika svår att tränga in i som de övriga standardalgoritmerna. Det visade sig t ex när en pojke på vårterminen i skolår 5 fick till uppgift att räkna ut 525 dividerat med 5 i huvudet. Han fick då först svaret 135 och sedan 150. Till det sista svaret gav han följande förklaring: ”Jag räknade med kort division. Hur många (gånger) går 5 i 5 och sedan hur många går 5 i 25.” Han berättade också att han hade lärt sig kort division av en lärarstuderande, som varit på besök i klassen. När jag bad honom tänka sig 525 kronor, som skulle delas lika mellan fem killar, klarade han dock av uppgiften.

Som jag nämnt tidigare, blev eleverna undervisade om standardalgoritmerna under skolår 6. Jag gjorde på vårterminen en mindre uppföljning genom att ge två flickor och två pojkar uppgifter från alla de fyra räknesätten att beräkna. Det visade sig då att en pojke använde standardalgoritm på alla räknesätt utom multiplikation, och att en flicka använde både egen skriftlig metod och standardalgoritm på additionsuppgiften. Alla övriga uppgifter löstes med huvudräkning eller elevernas egna skriftliga räknemetoder. De båda flickorna klarade dock inte av den svåraste divisionsuppgiften, 552 / 6.

Likhetstecknet

Ett problem, som uppstod i nästan alla räknesätt, var missbruk av likhetstecken. Jag ger endast ett exempel på detta. På höstterminen i skolår 4 skrev en flicka ned följande lösning till additionen 148 + 74:

$$148 + 74 = 148 + 2 = 150 + 50 = 200 + 22 = 222.$$

Man kan ju lätt följa hennes tankegångar i denna lösning. Hade hon enbart muntligt redogjort för lösningen, hade nog heller ingen reagerat på den. Samtidigt kan man inte komma ifrån att den matematiskt sett är felaktig. Ett sådant missbruk av likhetstecken kan få katastrofala följder, när eleverna fortsätter med algebra och då främst ekvationslösning, där likhetstecknets innebörd att visa på en likhet mellan två uttryck är av fundamental betydelse.

Man skulle kunna hävda att detta missbruk på något sätt är en följd av att eleverna får använda sina egna beräkningsmetoder, som de nästan alltid skriver horisontellt. Personligen skulle jag i stället vilja påstå att det snarare är en fördel att den bristande respekten för likhetstecknet kommer i dagen, när eleverna räknar på sitt eget sätt. Den elev, som använder vertikala uppställningar, reagerar nog lika litet över likhetstecknets betydelse.

Det som snarare bör diskuteras, är när läraren bör påpeka missbruket för eleverna, och när det är så väsentligt att inte avbryta elevernas i övrigt riktiga tankegångar att hon/han avstår från att ta upp frågan om likhetstecknet. Ska eleverna verkligen få tillfälle att själva ta fram ny kunskap, som den sociala konstruktivismen hävdar, kan läraren inte ideligen gå in med sina kommentarer och rättelser och därmed störa elevens tankar. Själv försökte jag känna mig för, för att se om eleven verkligen var beredd att ta till sig kunskapen om likhetstecknets betydelse, innan jag gick in och ifrågasatte en felaktig användning av tecknet.

Några slutsatser av försöket

I denna korta artikel har jag givetvis inte kunnat ta upp alla de resultat, som jag anser mig ha kommit fram till i försöket. Jag skulle dock vilja sammanfatta resultaten på följande sätt:

- Elever klarar av att hitta sina egna metoder, oftast på egen hand men någon gång med stöd från kamrater eller lärare. Det skulle alltså tyda på att de inte har behov av standardalgoritmerna för enklare uträkningar.

- Det finns inte oväntat problem även med detta sätt att arbeta på. I vissa räknesätt, subtraktion, multiplikation och division kör många elever fast, och det kan ta lång tid, innan de kan klara av mer invecklade uppgifter. I sådana fall kan de behöva alternativa metoder. Frågan är dock om uppgifterna i så fall lämpligen löses med standardalgoritm eller med miniräknare.
- Eleverna angriper inte alla uppgifter på samma sätt. Varje enskild elev kan använda många olika lösningsstrategier för att lösa uppgifter inom samma räknesätt. Hon tittar ofta på hur de ingående talen ser ut och anpassar sin lösningsmetod till det. Även inom klassen som helhet kommer många olika lösningsstrategier till användning på samma uppgift. Detta ser jag definitivt inte som en nackdel. Snarare ger det anledning till intressanta diskussioner inom klassen eller i elevgrupper.
- Just genom att eleverna tvingas att reflektera över vilka strategier, som kan vara tillämpliga på varje särskilt uppgift, tillämpar de och utvidgar sin taluppfattning. Detta framträder ganska klart i de exempel, som jag visat tidigare men blev kanske ändå tydligare när jag gjorde en fallstudie på en enda elevs utveckling från skolår 2 till och med skolår 6.
- Det går i allmänhet långsammare att göra beräkningar på alternativa sätt, speciellt på mer komplicerade uppgifter, där eleverna inte omedelbart har en lösningsstrategi beredd. Det är med största sannolikhet effektivare att räkna med algoritmer, om och när eleverna väl behärskar utförandet av dem. Frågan är dock vad vi ska satsa på i matematikundervisningen, förståelse eller mer eller mindre mekanisk drill.
- Även de elever, som av någon anledning har svårigheter med matematik, kan klara av att med eller utan hjälp hitta metoder, som de kan göra till sina egna. Även dessa elever kan nå långt i förståelse av aritmetiska sammanhang, även om det går långsammare för dem än för deras kamrater.
- Eleverna använder i stort sett samma strategier, när de räknar i huvudet och när de räknar med papper och penna. Dessutom är det en flytande övergång mellan de båda formerna, eftersom en del elever ibland nöjde sig med att skriva endast ett eller ett fåtal tal som stödanteckning. Jag ser det som en stor fördel att eleverna slipper att tänka på olika sätt vid huvudräkning och vid skriftlig räkning.

Har algoritmer något värde?

Jag vill i detta sammanhang för fullständighetens skull även redovisa några fördelar, som jag anser att standardalgoritmerna för med sig.

- De har uppfunnits och förfinats genom århundraden. De är därför i dag mycket effektiva räknemetoder.
- De används på ungefär samma sätt hur komplicerade tal som än ingår i beräkningarna. Om beräkningarna är mycket besvärliga - t ex multiplikation av två tresiffriga tal med varandra eller division med tvåsiffrig nämnare - är de kanske de enda sätt, som kan användas, om man bara vill ta papper och penna till hjälp.
- De är en del av matematikens historia och utgör därför en kulturskatt, som vi bör vara rädda om.
- Att räkna med algoritmer är generellt sett mycket viktigt i matematikens tillämpningar. Beräkningsalgoritmerna för de fyra räknesätten kan kanske ge en introduktion till användning av algoritmer i andra sammanhang.

Kan egna metoder bli algoritmer?

Jag skulle också för ordningens skull vilja tillägga att även en icke-standardiserad räknemetod kan bli en algoritm, d v s ett räkneschema, som eleven följer utan närmare eftertanke om vad hon/han sysslar med. Så länge som eleven själv har funnit på metoden, är det ingen risk att det ska bli så. Om hon däremot har övertagit metoden från en kamrat eller från läraren utan att själv förstå den ordentligt, är risken överhängande. I så fall har hon tagit till sig en algoritm, som med största sannolikhet är mindre effektiv än standardalgoritmen. Det kan knappast vara till någon nytta för henne.

Ska elever möta algoritmer?

Jag ska slutligen våga mig på att ge mitt svar på frågan om huruvida standardalgoritmerna för de fyra räknesätten bör införas i matematikundervisningen, och när det i så fall skall ske.

För det första torde det i dag finnas en tämligen stor enighet om att det är bäst för eleverna att de får börja med att finna på sina egna metoder i de olika räknesätten, metoder, som de också får tillfälle att diskutera med varandra. Vi måste se själva räknandet som en process, som eleven arbetar sig igenom och samtidigt lär sig något av. Första gången hon gör en viss typ av beräkning, använder hon förmodligen en mycket krånglig metod. Så småningom förfinar hon den genom eget tänkande och/eller genom att lära sig av sina kamraters metoder. Så hittar hon fram till en metod, som hon trivs med, och som för henne är tillräckligt effektiv.

Men om och i så fall när ska då standardalgoritmerna komma in i undervisningen? Jag kan tänka mig att man kan säga på följande sätt. Om man väntar så länge att eleverna själva, när de ser dem, säger: ”Varför har vi inte fått lära oss de här algoritmerna tidigare, det är mycket lättare att räkna på det här sättet?”, då har algoritmerna kommit in vid rätt tidpunkt. Då har eleverna fått en så god taluppfattning att det mekaniska räknandet med algoritmer inte gör någon skada. Jag hoppas att det är detta som författarna till den senaste danska läroplanen menar, då de skriver:

> *I arbejdet med de naturlige tal udvikler eleverne fortsat egne beregningsmetoder. Standardiserede regneopstillinger indføres, hvis det for eleven er en forenkling af arbejdet.*

Det blir en förenkling av elevens arbete, när hon inte bara räknar på ett mekaniskt sätt, som någon har lärt henne, utan frivilligt väljer en metod, som hon känner att hon behärskar och förstår, och som snabbt kan utföra arbetet åt henne. Om hon då kommer underfund med att standardmetoden kan göra arbetet snabbare än de metoder, som hon själv uppfunnit och tidigare känt stolthet över och haft glädje av, behöver detta inte förringa hennes egen prestation. Det kan trots allt finnas tillfällen, när en traditionell algoritm kan vara praktisk att ta till, t ex när vi ska göra beräkningar i vårt checkhäfte eller motsvarande.

Referenser

Ernest, Paul (1991). *The Philosophy of Mathematics Education*. London: The Falmer Press.

Ernest, Paul (1998). Vad är konstruktivism? I Engström, Arne (red). *Matematik och reflektion,* sid 21 - 33. Lund: Studentlitteratur.

von Glaserfeld, Ernst (1998). Kognition, kunskapskonstruktion och undervisning. I Engström, Arne (red). *Matematik och reflektion,* sid 34 - 53. Lund: Studentlitteratur.

Försöket kommer att avrapporteras i Högskolan Dalarnas rapportserie för Kultur och Lärande.