

## Muffles' truffles

### *Undervisning i multiplikation med systematiskt varierade exempel*

I Nämnaren 2015:4 beskrivs ROMB-projektet övergripande i *Unga matematiker i arbete*. Här redovisas och diskuteras hur en del av materialet har utprovats i en årskurs 4. Multiplikation har, både nu och tidigare, engagerat och lett till artiklar som finns sammanställda på Nämnaren på nätet.

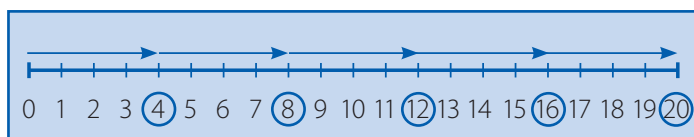
Vid Göteborgs universitet pågår sedan hösten 2013 ett projekt under namnet ROMB, vilket står för Reflekterande Och Matematiserande Barn. Jag och några kollegor kom i kontakt med *Context for learning mathematics*, som är en serie lärarhandledningar, och blev nyfikna på om materialet kunde användas i en svensk kontext. Eftersom jag undervisade i åk 4 valde vi att genomföra lektioner ur materialet med inriktning mot multiplikation. Detta resulterade i en magisteruppsats där jag analyserade fem av tio lektioner. Min magisteruppsats har fokus på hur uppgifter i multiplikation är konstruerade i läromedlet samt vad eleverna får möjlighet att lära sig då materialet används i undervisningen. Resultatet visar att väl valda multiplikations-exempel med en inbyggd systematisk variation i kombination med areamodellen kan hjälpa eleverna att ta steget från att tänka multiplikation som upprepad addition till att tänka multiplikation som area.

### Multiplikation – inte bara upprepad addition

Multiplikation uppfattas vanligtvis av barn som upprepad addition. Det finns tidigare artiklar i Nämnaren som beskriver att det inte räcker, det ger inte tillräckligt djup för att elever ska förstå innebörden av begreppet multiplikation.

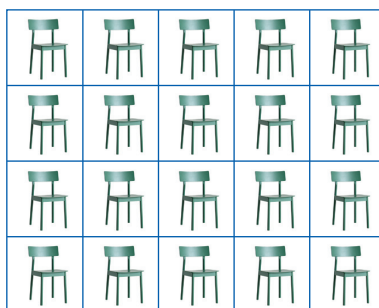
Ett klassrum är möblerat så att det finns 5 kolumner med 4 stolar i varje kolumn. Hur många stolar finns det i klassrummet?

Problemet kan lösas med hjälp av upprepad addition  $4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 20$ . Det som händer i denna situation är att samma enhet adderas: 4 stolar + 4 stolar + 4 stolar + 4 stolar + 4 stolar, vilket kan illustreras på en tallinje.



Genom att illustrera multiplikation som upprepad addition på en tallinje innebär det att eleven ser multiplikation i en linjär dimension. Den inledande multiplikationsundervisningen upp till  $10 \cdot 10$  bidrar också till att eleverna uppfattar multiplikation som upprepad addition då multiplikation ofta illustreras och förklaras med grupper som upprepar sig. Hur gör vi i multiplikationsundervisningen när eleverna möter multiplikation inom högre talområden? Enligt forskning av bland annat Magdalena Lampert slutar lärarna vanligen att illustrera multiplikation med grupper då det inte längre är hanterbart och går direkt över till att ställa upp multiplikationen med en algoritm.

För att få en djupare förståelse av begreppet multiplikation bör undervisningen även illustrera multiplikation som area. Exemplet ovan med stolarna kan då illustreras på följande vis med fyra rader och fem kolumner:



Tallinjen och areamodellen är två didaktiska verktyg som används för att stärka elevers matematiska aktivitet och kommunikation. Verktygen hjälper lärare och elever att synliggöra dolda idéer och tankar som annars kanske inte hade lyfts fram i undervisningen.

## Number strings

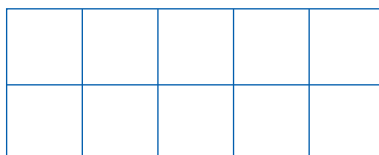
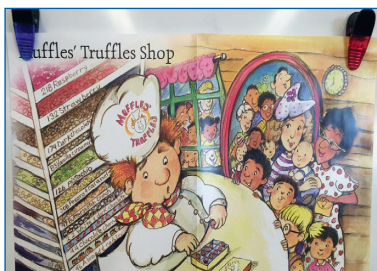
De fem lektioner som har analyserats har utgått från fem, som de kallas i Context for learning mathematics, *Number strings*. Number strings är systematiskt varierade exempel som är sammanlänkade med varandra. Dessa sammanlänkade exempel är konstruerade utifrån variation så att matematiska idéer främjar att eleverna utvecklar snabba, effektiva och tillförlitliga beräkningsstrategier. Syftet är inte att de ska använda en specifik algoritm som strategi, det vill säga en viss procedur, utan snarare fokusera på sin förståelse av tal.

## Modell av och modell för

Context for learning mathematics använder modeller för att främja utvecklingen av formell och generell matematik. Undervisningen börjar med att återspegla en konkret modell, en *modell av* något som senare ska övergå till att modellen kan användas som ett verktyg för att stödja ett matematiskt resonemang, en *modell för* något. Att gå från modell av till modell för kräver att eleverna får möta aktiviteter som gynnas av att en viss modell används som förklaringsmodell. Vad gäller multiplikation används areamodellen för att synliggöra de kommutativa, associativa och distributiva lagarna.

## Den första lektionen

De sammanflätade exemplen i den första lektionen ingår i en kontext som handlar om tryfflar i lådor. Inför denna lektion hade jag och klassen arbetat med temat, vi hade pratat om vad en tryffel är och vilka smaker som kan finnas. Vi hade också bekantat oss med en  $2 \cdot 5$ -låda som rymde tio tryfflar och diskuterat att lådan har två rader och fem kolumner d v s att produkten av två och fem är tio.



Temat Muffles' truffles och bilden av en  $2 \cdot 5$ -låda.

När vi skulle börja arbeta med den första serien sammanlänkade uppgifter satte sig eleverna i en halvcirkel framme vid tavlan. Jag hade förberett bilder på lådor som representerade varje multiplikation i den första serien.

Jag uppmanade eleverna att vara uppmärksamma då jag snabbt skulle visa en låda av en multiplikation. Jag visade den första multiplikationen  $2 \cdot 5$ , undrade hur många tryfflar som skulle få plats i lådan och hur de visste det. En elev förklarade att det var tio för hon såg två rader och fem kolumner. På tavlan valde jag att rita bilden utan att markera varje ruta, på så sätt fick eleverna också träna på att se en "öppen" area, d v s en area utan rutor i.

$2 \cdot 5$

$1 \cdot 5$

$4 \cdot 5$

$5 \cdot 5$

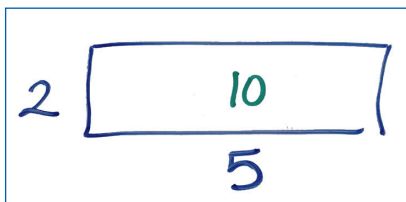
$2 \cdot 10$

$4 \cdot 10$

Detta är de sex exempel som ingår i denna serie sammanlänkade uppgifter.



A



B

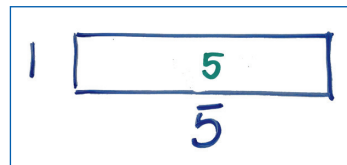
A visar bilden av  $2 \cdot 5$ -lådan som jag visade och B visar hur jag ritade elevens förklaring.

Sedan visade jag nästa bild på multiplikationen  $1 \cdot 5$  snabbt för eleverna. Jag undrade åter igen hur många tryfflar som skulle få plats i lådan och hur de visste det. En elev svarade fem, för han såg en halv låda, det vill säga hälften av föregående låda med en rad och fem kolumner. Jag ritade förklaringen på tavlan.

Det vi kan se i exemplet  $1 \cdot 5$ , i jämförelse med föregående exempel, är att vi har halverat antalet rader och därigenom har även svaret, produkten, halverats.



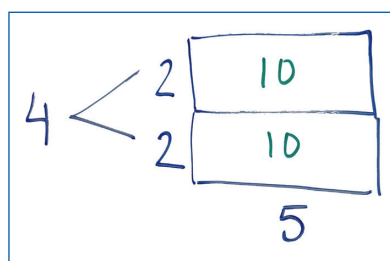
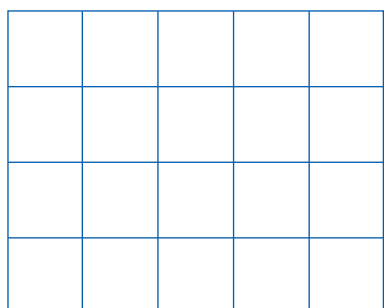
A



B

A visar bilden av  $1 \cdot 5$ -lådan jag visade och B visar hur jag ritade elevens förklaring.

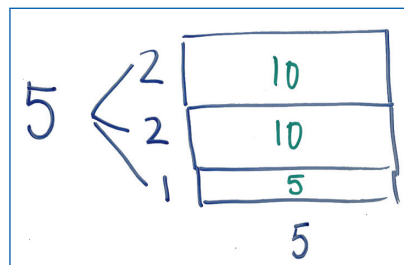
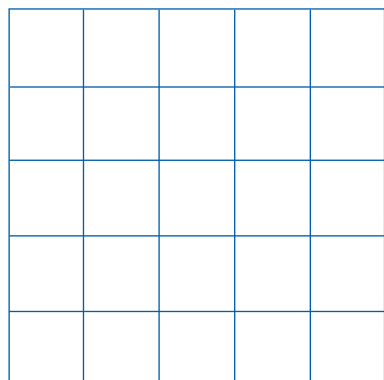
Nästa exempel  $4 \cdot 5$  visade jag också snabbt för eleverna. En annan elev svarade att hon såg 20 eftersom hon såg fyra rader och fem kolumner. Jag ritade upp det eleven förklarade men valde att markera att det var två stycken  $2 \cdot 5$ -lådor som satt ihop.



Bilden av  $4 \cdot 5$ -lådan och hur jag ritade förklaringen.

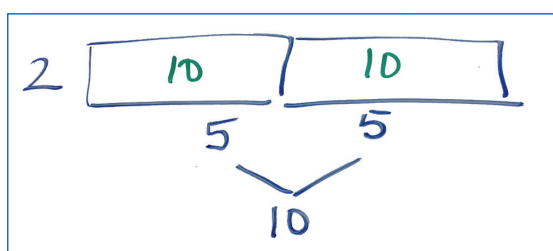
I exemplet ser vi att det är två stycken  $2 \cdot 5$ -lådor som sitter ihop under varandra. Här har raderna istället dubblats i relation till första exemplet och då har även produkten fördubblats. En annan viktig aspekt som blir synlig är den distributiva lagen, det vill säga att  $4 \cdot 5 = (2 \cdot 5) + (2 \cdot 5) = 10 + 10 = 20$ .

Nästa exempel som visades snabbt för eleverna var  $5 \cdot 5$  i form av en låda. På frågan hur många tryfflar som skulle få plats i lådan och hur de visste det förklarar en elev att det var 25, för han såg att det var två stycken  $2 \cdot 5$ -lådor och en  $1 \cdot 5$ -låda som satt ihop.



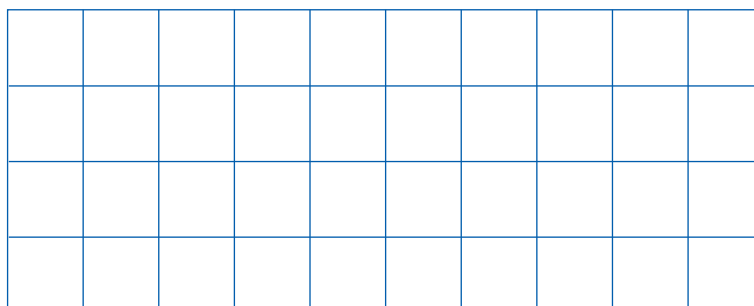
Bilden av  $5 \cdot 5$ -lådan och hur jag ritade elevens förklaring.

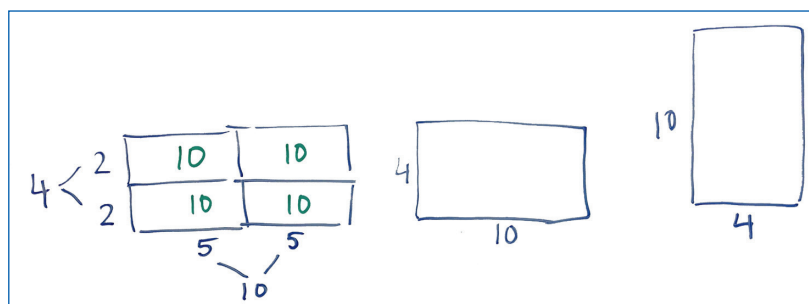
Det näst sista exemplet  $2 \cdot 10$  visades även det snabbt för eleverna som en bild. Jag ställde samma frågor som tidigare: hur många tryfflar får plats i lådan och hur vet du det? En elev förklarade att hon såg två rader och tio kolumner då hon visste att två stycken  $2 \cdot 5$ -lådor var placerade bredvid varandra. Detta exempel fokuserar på samma aspekt som i exemplet  $4 \cdot 5$ , dvs dubblering. Skillnaden här är att det nu är kolumnerna som dubblas i relation till det första exemplet  $2 \cdot 5$ . Resultatet blir dock det samma som när raderna dubblerades, alltså  $4 \cdot 5 = 2 \cdot 10$  då två stycken  $2 \cdot 5$ -lådor kombineras på två olika sätt, horisontellt eller vertikalt.



Bilden av  $2 \cdot 10$ -lådan och hur jag ritade elevens förklaring.

Det sista exemplet som visades som en bild var  $4 \cdot 10$ . Eleverna svarade snabbt att det är 40 tryfflar som kan få plats i lådan. En elev uttryckte att jag hade fördubblat raderna i relation till föregående exempel, alltså att lådan jag visade hade fyra rader och tio kolumner. När jag hade ritat upp hur den första eleven förklarade och även ritat en  $4 \cdot 10$  utan några mindre lådor i var det en annan elev som sa att hon tänkte  $10 \cdot 4$  istället. Detta gav oss möjlighet att diskutera den kommutativa lagen som innebär att  $4 \cdot 10 = 10 \cdot 4$ . Exemplets avsikt var att lyfta fram samma aspekt som i tidigare exempel, som dubbelt, i det här fallet dubbelt av kolumnerna i exemplet  $4 \cdot 5$ .





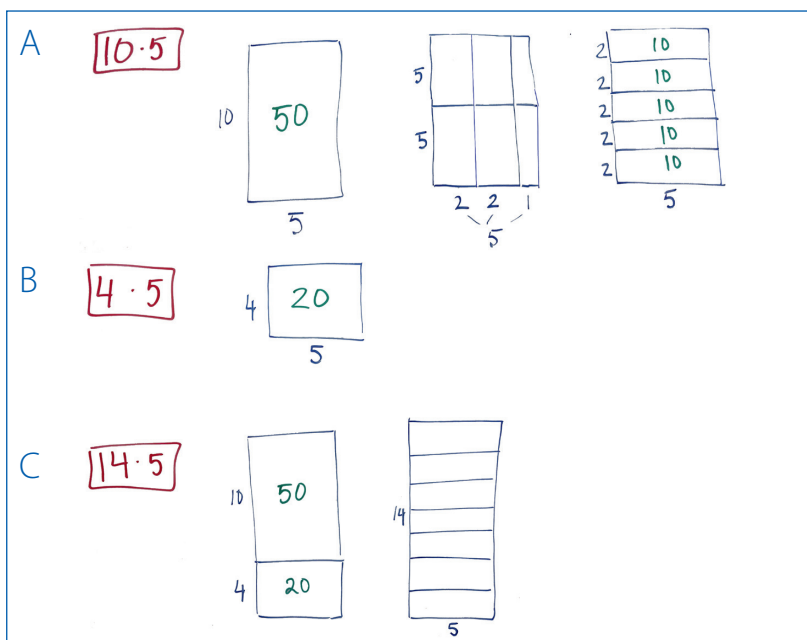
Hur jag ritade elevens förklaring av  $4 \cdot 10$ .

## Slutsatser

I genomförandet var det viktigt att visa lådorna så snabbt att eleverna hade möjlighet att uppfatta rader och kolumner men inte tid att räkna en ruta i taget. Det jag upplevde som intressant i detta avseende är hur areamodellen, genom detta material med sammanlänkade exempel i en trevlig kontext, introduceras som en naturlig del i undervisningen. Syftet är att eleverna bland annat ska se multiplikation som area men det "undervisas inte" utan areamodellen är snarare en modell i en kontext om tryfflar. En annan viktig del i genomförandet var taveldispositionen. Jag suddade inte ut något exempel utan lät allt stå kvar på tavlan för att ge eleverna möjlighet att se och diskutera vad som hände med exemplen när något varierade. Då detta var första gången jag använde mig av sammanlänkade exempel var det givetvis en del som jag missade. Nu i efterhand kan jag se att jag borde ha använt exemplen på tavlan för att jämföra mer och få igång en ännu intressantare och djupare diskussion om vad som händer när en faktor dubblas eller halveras.

## Från modell av till modell för

I magisteruppsatsen analyserade jag ytterligare fyra liknande lektioner med andra sammanlänkade exempel. Lektion två hade samma upplägg som lektion ett, det vill säga att jag visade en bild på en multiplikation och eleverna fick berätta hur de såg lådan som jag sedan ritade på tavlan. En markant förändring skedde mellan lektion två och tre. I de två första lektionerna var de snabba bilderna av multiplikationerna *en modell av något*, med andra ord en modell av en låda. Under lektion tre och sedan även fyra och fem, visades inga bilder alls. Jag skrev upp en multiplikation på tavlan och bad istället eleverna att föreställa sig en areamodell. Nu blev det *en modell för tänkandet*, det vill säga modellen hjälpte eleverna att se multiplikation som area. Dessa fem lektioner med sammanlänkade exempel hade två huvudsyften. Det ena syftet var att hjälpa eleverna att ta steget från att tänka multiplikation som upprepade addition till att ta steget till multiplikation som area och det andra syftet var att genom areamodellen illustrera och synliggöra den distributiva lagen. Ett exempel på den distributiva lagen är när eleverna möter exemplen  $10 \cdot 5$ ,  $4 \cdot 5$  och  $14 \cdot 5$  i den fjärde lektionen. Som jag nämnde tidigare visades inga bilder på detta stadium utan eleverna fick föreställa sig en bild. Så här såg det ut på tavlan när dessa exempel diskuterades:



Figur C visar att  $14 \cdot 5$  kan lösas med hjälp av den distributiva lagen:

$$14 \cdot 5 = (10 + 4) \cdot 5 = 10 \cdot 5 + 4 \cdot 5.$$

Eleverna fick möjlighet att kombinera olika lådor och träna på den distributiva lagen med de övriga sammanlänkade exemplen i lektion fyra och fem.

## Introduktion av multiplikationsalgoritmen

Efter genomförda lektioner såg jag att dessa fem lektioner gav en god grund för att introducera algoritmen för multiplikation. Det som blev synligt i areamodellen var deloperationerna i algoritmen då den bygger på den distributiva lagen. Det skulle vara intressant att använda deloperationerna och synliggöra dem i en så kallad lång algoritm för att senare ta steget till den korta algoritmen.

Lång algoritm

$$\begin{array}{r} 14 \\ \cdot 5 \\ \hline 20 \\ \pm 50 \\ \hline 70 \end{array}$$

Kort algoritm

$$\begin{array}{r} 14 \\ \cdot 5 \\ \hline 70 \end{array}$$

### LÄS MER

Cameron, A. & Fosnot, C. (2007). *Muffles' truffles – multiplication and division with the array*. Portsmouth: Heinemann.

[www.contextsforlearning.com](http://www.contextsforlearning.com)

Länk till uppsatsen finner du på Nämnaren på nätet.