8E
8F

Oändlighet och gränsvärde

SAMBAND OCH FÖRÄNDRING – DIGITAL TEKNIK – PROBLEMLÖSNING

Avsikt och matematikinnehåll

Kunskap om oändlighet och gränsvärden är grunden för att förstå infinitesimalkalkyl. Aktiviteten utmanar elevernas föreställning om oändlighet. Syftet är att introducera begreppet gränsvärde och att illustrera det med matematikens språk. Genom aktiviteten utmanas elevernas kreativitet och problemlösningsförmåga utifrån ett par gränsvärdesproblem. Problemen går att lösa med grafiska, algebraiska och numeriska metoder. Uppgifterna ger möjlighet att låta eleverna lära sig av varandras strategier.

Förkunskaper

Rationella uttryck, funktioner, grafer, definitionsmängd och värdemängd.

Material

Elevsida, penna och tillgång till grafritande hjälpmedel. Det är en fördel om graferna kan visas i helklass med hjälp av projektor.

Beskrivning

Efter en introduktion om oändlighet så tilldelas eleverna var sitt uppgiftspapper. Utan några tidigare förkunskaper om gränsvärden ska eleverna fundera över vad som händer med funktionerna

$$f(x) = \frac{x^2}{x^3 - x^2} \quad \text{och} \quad g(x) = \frac{2x - 3x^2}{x^2 + 1}$$

då x går mot oändligheten (det vill säga då x blir större och större). Det bör vara valfritt - men eleverna kan använda sig av digitala hjälpmedel. Enligt modellen EPA (enskilt – par – alla) får eleverna efter en stund jämföra sina resultat och strategier med en klasskamrats. Läraren lyssnar in de olika sätten som eleverna tagit sig an problemet på. Genom att det även finns några följdfrågor (Vad händer med $f(x)$ då x närmar sig 1? Vilken definitionsmängd och värdemängd har $f(x)$?) bör varje elev ha något att fundera över tills dess att läraren bryter arbetet för en helklassdiskussion. I diskussionen sammanfattas elevernas lösningsförslag och de strategier som de använt sig av vid problemlösningen. Läraren har möjlighet att införa beteckningen limes och skrivsättet $x \to \infty$.

Introduktion

Be eleverna vid lektionens start att fundera över vad det innebär att ett tal x blir större och större i ett uttryck som t ex $x + 2$. Vad blir uttryckets värde då x växer obegränsat?

Begreppet oändlighet kan nu introduceras enligt följande:
Berätta om *Hilberts hotell*, ett hypotetiskt hotell, konstruerat av den tyske matematikern David Hilbert i början av 1900-talet. Den speciella egenskapen med detta hotell är att det har oändligt många rum. När en ny gäst en dag anländer får han till sin besvikelse veta att hotellet är fullbelagt. Hotellets portier Hilbert lovar att han ändå kan hitta ett ledigt rum. Han ber alla innevarande gäster att flytta till rummet med högre rumsnummer på så sätt att gästen i rum 1 flyttar till rum 2, gästen i rum 2 flyttar till

rum 3 och så vidare. Alla gästerna har nu ett rum och det finns möjlighet för den nyanlända gästen att flytta in i rum 1.

Den första slutsatsen blir: ett plus oändligheten är fortfarande oändligheten.

Berättelsen om hotellet fortsätter. Nästa kväll, när hotellet fortfarande är fullbelagt, anländer en oändligt stor buss med ett oändligt antal nya gäster. Vad gör Hilbert? Jo, han ber innevarande gäster att flytta till det rum som har dubbelt rumsnummer mot det som de nu bor i. Det innebär att gästen i rum 1 flyttar till rum 2, gästen i rum 2 flyttar in i rum 4 och så vidare. De gamla gästerna bor därmed kvar i rummen med jämna nummer och de nya gästerna får lov att flytta in i rummen med udda nummer.

Nästa slutsats: En dubbel oändlighet förblir oändlig.

Uppföljning

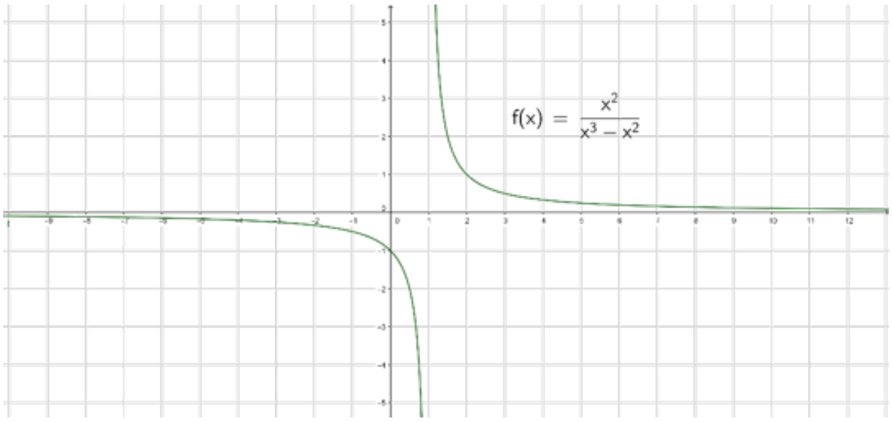
Led en diskussion utifrån elevernas undersökningsresultat. Det finns olika metoder att angripa problemet på, exempelvis numeriska, grafiska eller algebraiska. Att lyfta fram olika lösningsstrategier ger eleverna bra verktyg för fortsatt arbete i matematik. Det finns elever som sätter in större och större värden på x i funktionsuttrycken och på så sätt räknar ut att $f(x)$ blir allt mindre.

Andra elever kanske förkortar med x i funktionsuttrycket $f(x)$ och får ett enklare samband att utgå från:

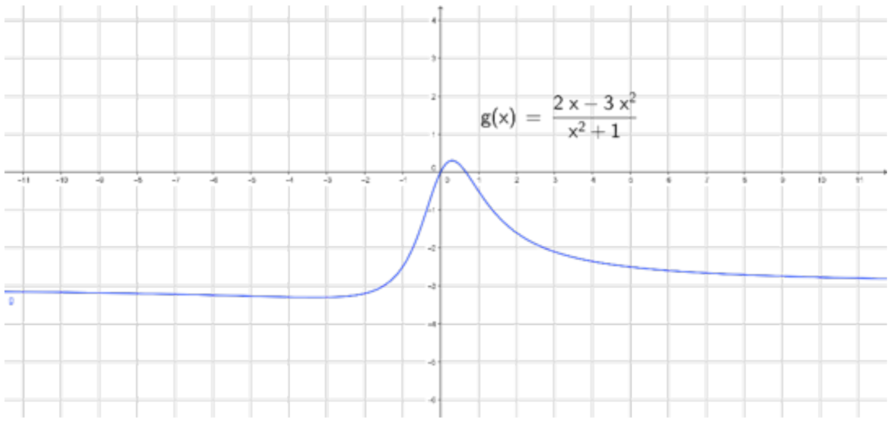
$$f(x) = \frac{1}{x-1}$$

Då ges tillfälle att resonera kring att ju större x som sätts in i funktionen desto mindre värde får funktionen, vilket betyder funktionen närmar sig noll.

Några elever kan ha skissat kurvan eller använt sig av ett grafritande verktyg (t ex Geogebra). Grafen till funktionen kan studeras tillsammans i klassen via en projektor. Då x blir oändligt stort (eller negativt oändligt stort) närmar sig funktionen noll.



Funktionen $g(x)$ är antagligen lite svårare för eleverna. Det är lämpligt att grafen till $g(x)$ ritas med ett grafritande hjälpmedel och projiceras på tavlan. Funktionen verkar närma sig -3 då x går mot oändligheten. Går det att vara helt säker på det?



Här kan du visa ett ”trick” där både täljare och nämnare divideras (förkortas) med x^2 så att

$$g(x) = \frac{\frac{2}{x} - 3}{1 + \frac{1}{x^2}}$$

För stora x går både $\dfrac{2}{x}$ och $\dfrac{1}{x^2}$ mot noll och $g(x)$ går därmed mot -3. Samma sak händer för stora negativa värden på x.

Åter tillbaka till funktionen $f(x)$. Har några elever funderat kring vad som händer då x närmar sig 1? Studera funktionens graf tillsammans. Funktionen $f(x)$ är inte definierad för $x = 1$ (och observera, inte heller för $x = 0$, även om det tycks se ut så). Nära $x = 1$ händer något märkligt. Då x närmar sig 1 från vänster så växer funktionen mot $+\infty$ och då x närmar sig 1 från höger så avtar funktionen mot $-\infty$. Det blir olika gränsvärden från höger respektive vänster och funktionen *$f(x)$ saknar gränsvärde* då x närmar sig 1!

Vad blir definitionsmängd och värdemängd för funktionen $f(x)$? Svaret är att definitionsmängden, D_f: $x \neq 1$ och $x \neq 0$ och att värdemängden, V_f: $y \neq 0$.

$$f(x) : \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^3 - x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x-1} = 0.$$

Avslutningsvis kan skrivsättet limes (som betyder gräns) introduceras och visas med exemplet $f(x)$: Det också lämpligt att ta upp skrivsättet: Då $x \to \infty$ så $f(x) \to 0$.

Variation

Aktiviteten går att variera genom att andra funktioner studeras. För $h(x) = \dfrac{x^3 - 4x}{x - 2}$ är grafen en parabel men funktionen är inte definierad för $x = 2$ (en punkt på kurvan saknas). Funktionen är diskontinuerlig men har ett gränsvärde då $x \to 2$. Både från höger och vänster närmar sig funktionen 8. Genom förenkling med konjugatregeln är det lättare att se då $h(x) = x(x + 2)$.

Utveckling

Oändlighet och gränsvärden kan studeras ihop med talserier och deras summor. Den geometriska summan

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$$

har ett gränsvärde medan den harmoniska seriens summa

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots$$

istället divergerar. Oändlighetsresonemanget kan fördjupas ytterligare. De naturliga talen är oändligt många, likaså heltalen. De rationella talen är oändligt många de också eftersom de kan ordnas för att räknas upp. De reella talen, som fyller hela tallinjen, är inte uppräkningsbara så de är fler än heltalen och de rationella talen. Oändlighet är inte ett entydigt begrepp!

Erfarenheter

Idéen med att låta eleverna upptäcka gränsvärdesbegreppet utvecklades för öka förståelsen för skrivsättet limes och för derivatans definition. Det har visat sig att elever har kreativa och ibland väldigt olika sätt att lösa problemen på. Limes-beteckningen blir naturligare att använda i exempel som eleverna själva har undersökt och jobbat med.

NCM

Oändlighet och gränsvärde

Vad händer med funktionerna $f(x)$ och $g(x)$ då x går mot oändligheten?

$$f(x) = \frac{x^2}{x^3 - x^2}$$

$$g(x) = \frac{2x - 3x^2}{x^2 + 1}$$

Vad händer med $f(x)$ då x närmar sig 1?

Vilken definitionsmängd och värdemängd har $f(x)$?