Håkan Lennerstad

Att köa

Att stå i en kassakö kan vara en plågsam leda i väntan på något mycket åtrått, exempelvis biljett till en länge emotsedd konsert. Men är man som artikelförfattaren här intresserad av matematik kan väntan bli mindre trist. Dessutom kanske det går att ta reda på något om köernas matematik.

Hasse och Tage sjöng en gång i sin Kösång: *Kom, låt oss stå på samma fläck, ja, låt oss stå i kö, ja låt oss stå och vänta.* Själv fick jag nyligen stå i kö tre och en halv timme för att köpa en biljett, varav en och en halv timme utomhus i isande snålblåst. Man ger sig väl inte när man väl har ställt sig i kön? Jag fördrev tiden med att fundera på frågan: *Om man vill stå i kö så kort tid som möjligt för att köpa en biljett, när bör man ställa sig i kön?*

Avgörande storheter

Det visar sig att svaret på frågan beror på två hastigheter. Den ena är köhastigheten (eller köintensiteten), d v s hur många nya köande som ställer sig i kön per minut. Den andra är kassahastigheten som är hur många kunder som biljettkassan avverkar per minut.

Om kassahastigheten hela tiden är större än köhastigheten så krymper kön ständigt från det att kassan öppnar. Då får man kortast kötid om man ställer sig i kön just innan kassan stänger. Eller, förstås, så snart köns längd har blivit noll. I detta fall är det inte någon vidare bra idé att ställa sig i kön innan kassan öppnar. Om däremot köhastigheten ibland är större än kassahastigheten är det viktigt att anlända innan en eventuell stark tillströmning av köare. Gränsen går när kassahastigheten är lika med köhastigheten. Allt beror på hur kön växer till, minut för minut.

Så lite matematik

Säg att kassan öppnar vid tidpunkten 0. Antag att köhastigheten vid tidpunkten x är $f(x)$. Förmodligen är $f(x)$ ofta stor vid $x = 0$, när kassan öppnar, och en stund därefter. Vi antar dock ingenting sådant. Det är en funktion som inte kan vara negativ och ofta strikt positiv både för $x < 0$ och $x > 0$.

Antag nu att du kommer innan kassan öppnat. Du kommer vid tidpunkt t, där $t < 0$. Då måste du åtminstone vänta $-t$ minuter tills kassan öppnar. Hur lång är kön när du anländer? Jo, totalt har $\int_{-\infty}^{t} f(x)dx$ personer kommit. Med integralen lägger vi ihop alla köande som kommit fram till tiden t.

Men det viktiga är ju *hur länge* man får vänta. Låt oss beteckna denna tid med $V(t)$. Du får vänta $-t$ minuter plus den tid det tar att expediera de $\int_{-\infty}^{t} f(x)dx$ personerna som är före dig.
Om vi betecknar kassahastigheten med k, så är denna tid $\int_{-\infty}^{t} f(x)dx/k$. Alltså antalet personer dividerat med hastigheten som de expedieras i kassan.

Så $V(t) = -t + \int_{-\infty}^{t} f(x)dx/k$. När är denna minimal? Jo, då $V'(t) = 0$.

Deriverar vi $\int_{-\infty}^{t} f(x)dx$ med avseende på t får vi $f(t)$. Så $V'(t) = -1 + f(t)/k$

som är noll då $-1 + f(t)/k = 0$, dvs då $f(t) = k$. Denna säger att vi har minimum för den tidpunkt t då köhastigheten är lika med kassahastigheten.

Om du kommer efter att kassan öppnar

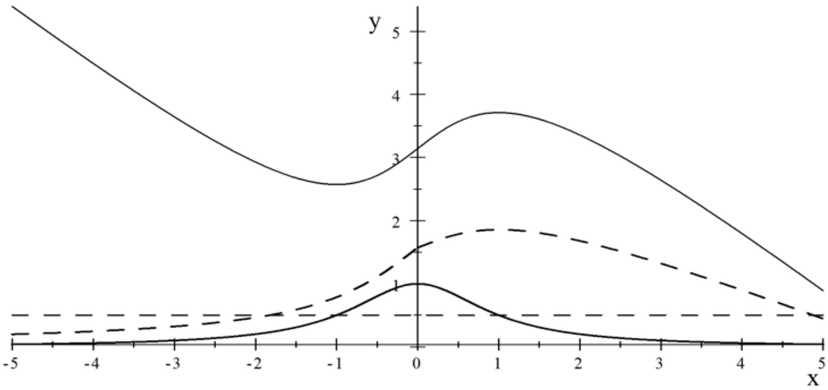
Vad händer om man kommer efter att kassan har öppnat? Då är alltså $t > 0$. Om $t > 0$ så har vi kvar $\int_{-\infty}^{t} f(x)dx - kt$ personer i kön vid tiden t, eftersom kt personer blev expidierade medan du var på väg till kön.

Så blir det din tur efter $\left(\int_{-\infty}^{t} f(x)dx - kt\right)/k$ minuter, återigen antalet personer som står i kön dividerat med kassahastigheten. Även här är $V(t) = -t + \int_{-\infty}^{t} f(x)dx/k$! Vi får samma villkor: köhastigheten är lika med kassahastigheten.

Derivatan satt till noll ger inte allt

Men villkoret $V'(t) = 0$ ger inte alla möjliga minima. Villkoret kan förstås även ge maxima, beroende på hur $f(x)$ ser ut. Undvik dem! Och vi kan ha andra minima. Det kan vara när kön är tom och när kassan stänger. Här är ett exempel.

I figuren på nästa sida är den nedre heldragna linjen $f(x)$ köhastigheten i någon tidsenhet x. I detta fall är köhastigheten störst när kassan öppnar och avtar sedan snabbt. Den nedre streckade linjen är kassahastigheten, som här är mindre än köhastigheten då x är mellan -1 och 1. Den övre streckade linjen är köns längd vid varje tidpunkt. Den övre heldragna är den kanske mest intressanta, väntetiden om man ställer sig i kön vid tiden x. Den har ett minimum strax innan kassan öppnar. Det är, som väntat, just när kö- och kassahastigheterna är lika. Om kassan stänger senare än tre tidsenheter efter att den har öppnat så får man i detta fall kortare väntetid om man kommer just innan kassan stänger.



Utommatematisk sammanfattning

Man bör alltså försöka gissa när folk anländer, dvs efter vilken kurva. Men ännu svårare är nog att gissa hur lång tid det tar i biljettkassan. Det kan exempelvis bero på hur många kassor man valt att öppna, vad som ska göras för varje person, hur kassans datorsystem fungerar, om det är en kassa personalen har erfarenhet av … Om biljetterna riskerar att ta slut är frågan annorlunda. Då är det ännu viktigare att gissa hur folk anländer.

Vad är då utbytet?

En exakt beräkning med en funktion, som kanske inte är särskilt realistisk, gör ändå att man får en känsla för vad som pågår. Det är en kunskap som är svår att specificera och testa, men som jag menar är en stor del av poängen med matematiska undersökningar. Det är en idémässig matematisk kunskap som är annorlunda än den beräkningsbara, men ofta underskattad. Vår intuition kan förändras och utvecklas mycket. *Det blir lättare att bedöma vad som är relevant utan att göra någon matematisk kalkyl.* I alla fall inte varje gång. Detta under förutsättning att man förstår kalkylen. Ännu mer kan man få ut av den om man får möjlighet att diskutera dess för- och nackdelar.

P. S.

Vilken biljett väntade jag på? Ja, det var egentligen ingen biljett, det var ett årskort på ett nytt gym som öppnade tvärs över gatan från min bostad. Det mest positiva var att ingen av de väntande träningshungriga i kön tycktes förlora humöret av detta utdragna väntande. De kanske löste andra angelägna problem under tiden.