Sannerligen synnerligen osannolikt

Håkan Johansson och Lennart Skoogh

I en nation som Sverige, som så totalt har gripits av speldjävulen, behöver både lärare och elever vettiga vardagskunskaper om sannolikhet och om chansen att vinna i olika spel. Med utgångspunkt i elevers intresse för spel och undersökningar presenteras i artikeln några konkreta undervisningsidéer, som kan bidra till att utveckla intresset och förståelsen för sannolikhetsresonemang.

Sannolikhet i läroplanen

Sannolikhetslära som moment i grundskolans matematikundervisning förekom första gången i Lgr 69 där det stod *Kännedom om funktions- och sannolikhetsbegreppen.*

Momentet gavs ett större undervisningsutrymme i Lgr 80 genom huvudmomentet *Statistik och sannolikhetslära.* I kursplanen fanns både nödvändiga och önskvärda moment. Bland de nödvändiga fanns *Undersökning av sannolikhet för händelser* och bland de önskvärda *Sannolikhetsbegreppet och beräkning av sannolikheter i enkla fall*.

Bland mål att uppnå i den nya läroplanen Lpo 94 finner man kravet *att eleven behärskar grundläggande matematiskt tänkande och kan tillämpa det i vardagslivet.*

Bland kursplanens mål att uppnå står *Eleven skall kunna använda begreppet sannolikhet i enkla slumpsituationer*. Av mål att sträva mot framgår att *vi ska sträva efter att eleven förstår och kan använda begreppet sannolikhet i konkreta slumpsituationer*.

Håkan Johansson *är lärarfortbildare, läromedelsförfattare och rektor för friskola.* ***Lennart Skoogh*** *är frilanspedagog, lärarfortbildare och läromedelsförfattare.*

Historisk aspekt

Sannolikhetsläran började utvecklas i mitten av 1600-talet men då enbart som en matematisk teori för olika slags spel[1)]. Fransmannen de Méré var en passionerad hasardspelare och hade troligen även goda kunskaper i sannolikhetslära. Han vände sig till den kände matematikern och filosofen Pascal med några frågor. Grunden till sannolikhetslära lades i en brevväxling mellan honom och Fermat åren 1647-48, då de lyckades besvara de Mérés problem. De utgick från den klassiska definitionen att sannolikheten för en händelse är kvoten mellan antalet gynnsamma och antalet möjliga utfall.

På 1700-talet utvecklades sannolikhetsläran snabbt och man började använda den i andra sammanhang. Sannolikheten bestämdes istället genom relativa frekvenser. En förutsättning för denna syn på sannolikhetsläran är att det existerar ett gränsvärde för den relativa frekvensen.

Numera används sannolikhetslära inom de flesta områden och den har under 1900-talet också getts en axiomatisk grund av ryssen Kolmogorov.

[1)] *Det finns andra som menar att att sannolikhetslära startade med Cardano 100 år tidigare. Man kan också ha uppfattningen att det var andra orsaker än spel som gjorde att man började att intressera sig för sannolikhetsräkning redan på 1600-talet, t ex i samband med livsförsäkringar i Nederländerna.* (red anm.)

de Mérés problem
Här är ett av de problem som de Méré brevväxlade med Pascal om.

Då man kastar en symmetrisk tärning fyra gånger är sannolikheten för att få minst en sexa större än 1/2.

Är sannolikheten att få minst en dubbelsexa vid 24 kast med två tärningar också större än 1/2?

Sannolikhetslära i baren

För inte så länge sedan fick vi faktiskt tillfälle att fundera på sannolikhet när vi satt i en bar tillsammans med en vän Anders. Vi beställde varsin drink och valde tre olika drinkar med samma färg. Den som bar drinkarna till vårt bord glömde bort vad som fanns i de olika glasen och delade ut dessa helt på måfå.

Frågan är nu hur stor chansen är att alla tre får rätt drink respektive att åtminstone en får rätt drink. Här kan en enkel tabell vara till stor hjälp. Däremot bör man nog även utan tabell kunna besvara frågan: ”Hur stor är chansen att precis två får rätt drink?”

Lennart	L	L	H	H	A	A
Håkan	H	A	L	A	H	L
Anders	A	H	A	L	L	H

Alla rätt: 1/6, Minst en rätt: 4/6=2/3

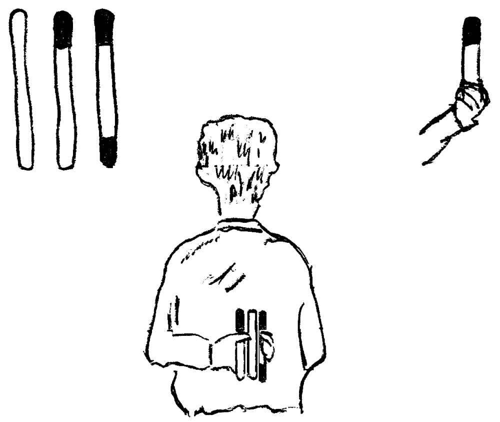
För att fortsätta på det inslagna temat beslöt vi att singla slant om betalningen. Vi kastade därför två mynt.

Om det blev två krona skulle Lennart betala, om det blev två klave skulle Håkan betala och om det blev en krona och en klave skulle vår vän betala.

Här är det ganska lätt för elever att genom en undersökning komma underfund med att Anders med 50 % sannolikhet får betala. Det kanske kan nämnas att en berömd fransk 1700-talsmatematiker vid namn d´Alembert ansåg att man i fall som detta har tre lika sannolika fall. Det är dock viktigt att förstå att så inte är fallet.

Två krona (K) (K)
Två klave (Kl) (Kl)
En krona, en klave (K) (Kl) *eller* (Kl) (K)

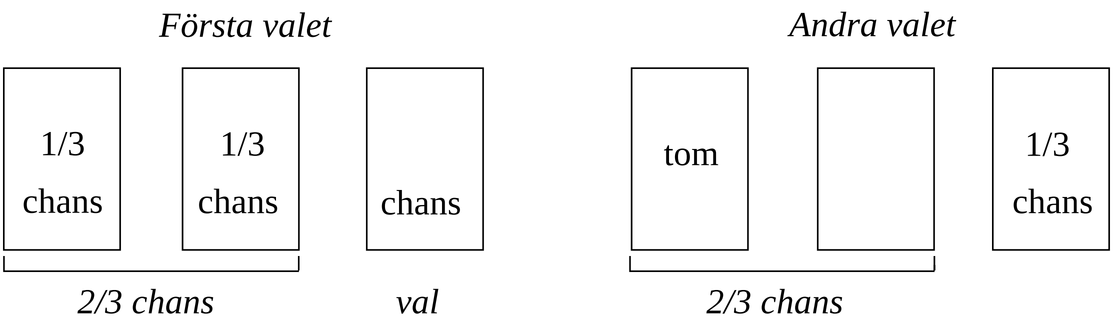
Det är ofta svårt att överföra denna kunskap till andra områden, men det är trevligt och lätt att göra praktiska försök som ger överraskande resultat. Vi har prövat med ett enkelt pararbete, där deltagarna får tre små likadana pinnar: en omålad, en som är blå i ena änden och en som är blå i båda ändarna. Den ene i paret håller pinnarna bakom ryggen, tar fram en pinne och visar dess ena ände. Den andre ska nu gissa hur pinnens andra ände ser ut. Då vi gör ett systematiskt försök finner vi ganska snart att detta är en parallell till slantsinglingen ovan.



Det är 2 chanser på 3 att den dolda änden har samma färg som den som visas.

Rena rama sanningen

Ett enkelt men intressant försök kan också reda ut den sannolikhetsparadox som har förekommit i TV-programmet *Rena rama sanningen*. Idén till programmet har förstås kommit från USA, där ett liknande program orsakade en stormig debatt i en tidskrift. Marilyn vos Savant, författare till tidskriftens matematikspalt, besvarade en fråga om tävlingen och fick nästan hela läsekretsen emot sig. Även flertalet akademiker som deltog i debatten ansåg att hon hade fel. En del kom med omdömen om den kvinnliga redaktören som de förmodligen djupt har ångrat.



Problemet är i korthet följande: Bakom en av tre dörrar finns en fin vinst. Bakom de två andra är det tomt. (I USA var det en bil respektive bräkande getter.) Du ska välja en av de tre dörrarna. Programledaren öppnar dock inte den dörr du väljer utan en av de andra och alltid en tom.

Du får chansen att ändra ditt val och frågan är förstås, om du bör göra det eller hålla kvar ditt första val. Hur skulle du gjort?

Genom ett enkelt försök kan man lätt övertyga sig om att man bör byta. I klassrummet kan det vara lämpligt att t ex använda tre muggar som man vänder upp och ned och låta eleverna arbeta i par. Medan elev A vänder sig bort placerar elev B ett mynt under en av muggarna.

Elev A får sedan välja en av muggarna och B lyfter då alltid en mugg som det är tomt under. För att få ett systematiskt försök håller elev A fast vid sitt första val tio gånger i sträck och ändrar sedan valet i lika många fall. Eleverna prickar av antalet fall då myntet ligger under den valda muggen och de båda metoderna jämförs. Det står då klart för deltagarna att man absolut ska byta och ett resonemang gör det sedan troligt, att chansen att vinna vid byte är 2/3. Den chansen är ju lika stor som sannolikheten att man väljer fel mugg vid första gissningen.

Spel i Sverige

De legala spelen i Sverige omsätter ungefär 30 miljarder kronor per år. Statens vinst på dessa spel är 6–7 miljarder kronor. Dessutom förekommer en hel del illegala spel och spel som organiseras av utländska bolag. Man räknar med att minst 50 000 svenskar är så spelberoende att de inte fungerar i samhället. Av de spelberoende är ca 80 % män.

Såvida inte försöken att stoppa ännu en ny spelform lyckas kommer man snart att introducera *Bingo Express* i Sverige. Det är ett spel med 144 dragningar per dag. Spel med snabb återkoppling ger snabbt ett spelberoende. Här finns chans att fånga in många unga. Nyligen stod det i dagstidningarna att var fjärde elev på högstadiet och gymnasiet spelar regelbundet trots rekommendationer om att ungdomar under 18 år inte ska tillåtas spela om pengar. Följden blir lätt att ungdomarna skuldsätter sig eller snattar för att finansiera spelandet.

Chanser vid olika slags spel

Vad säger det oss att vinstchansen på t ex en Bellmanlott är 1 på 4, på en Trisslott 1 på 5 och på en Penninglott 1 på 6? Jo, bara att var fjärde, femte respektive sjätte lott

Nya spel ska ge guld till staten

Tipstjänsts satsning får hård kritik

Tipstjänst presenterar i dag två nya stryktipskuponger. En med enbart engelska matcher, och en blandad kupong med italiensk fotboll och allsvenskan. Premiär redan nästa helg.

Dessutom hårdsatsar

värdeautomater på krogarna. Dessa tros

guldkalv för Tipstjänst

Göteborgsposten 960828

ger någon vinst. Däremot säger det inget om hur mycket man i genomsnitt förlorar på varje lott. Det är alltid mindre än 50 % av insatsen som går tillbaka till dem som spelar och man visar lätt, att man på varje penninglott för 20 kr gör en förlust på mer än 14 kr.

Exempel
Vid en dragning har det sålts 70 000 lotter á 20 kr. Den totala vinstsumman är då ca 400 000 kr. Anta att man köper alla lotter, dvs satsar 1,4 miljoner och alltså med säkerhet vinner 0,4 miljoner. Förlusten blir alltså 1 miljon kronor eller 14,29 kr per lott.

Hur många tror att chansen att vinna högsta vinsten på en penninglott i Sverige är större än risken för att dödas i en trafikolycka under ett år? Det kan man förstås göra en uppskattning av. Risken att dödas i trafiken under ett år i Sverige är ungefär 0,01 % (800/8 000 000) och chansen att vinna 1 miljon är ungefär 0,0003 % om man köper en penninglott (2/576 000).

Lotto är för närvararande världens största spelform. Man ska pricka in 7 tal av 35. Det är alltså 7/35 chans att första talet blir rätt. Det är sedan 6/34 chans att få andra talet rätt. Chansen att få båda talen rätt är $(7/35) \cdot (6/34)$ och chansen att få alla 7 talen rätt är 1 på 6 724 520.

Köp premieobligationer!

Om man spelar på premieobligationer får man tillbaka hela insatsen efter ett visst antal år. Dessutom deltar man i ett antal dragningar med höga vinster under tiden. Det har under de senaste åren varit ganska fördelaktigt att köpa premieobligationer. Vi tar som exempel statens premieobligationer 95:1 med sju års löptid. Varje år deltar man i 2 dragningar och varje gång kan man vinna allt mellan 500 kr och en miljon kronor.

Vid varje dragning utlottas 6,5 % av lånebeloppet. Eftersom vinsten är skattefri motsvarar det efter skatt en ränta på ca 10 % på insatta pengar. Om man köper 10 obligationer i följd är man *garanterad* en vinst motsvarande 4 % ränta på insaten. Det motsvarar ca 7 % ränta på insatt kapital, dvs mer än banken ger. Ändå har man chansen att vinna vid 14 dragningar och man får dessutom alla pengar tillbaka. Om man räknar obligationen som en lott och vinstchansen på samma sätt som för penninglotten visar det sig att man på varje obligation med priset 5 000 kr i genomsnitt vinner 2 672 kr samt får hela insatsen tillbaka.

Spelarens fallgrop

De flesta som spelar fascineras troligen av chansen till en stor vinst och analyserar förmodligen inte alls riskerna för en förlust. Men även de som gör så löper stor risk att komma fel, eftersom det finns många fallgropar.

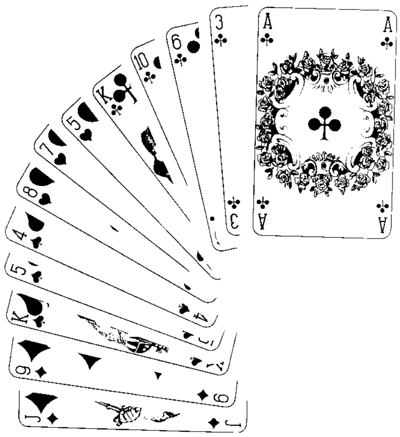
Den vanligaste fallgropen är kanske, att man så att säga tror att en spelkula (eller motsvarande) har ett minne. Men även om t ex en viss färg dominerat de senaste 100 eller 1 000 gångerna då man t ex spelar roulette finns det ju inget som säger, att samma färg inte kan dominera ännu mer även de följande 10, 100 eller 1 000 gångerna.

Det är också lätt att göra tankefel då chanser analyseras. Sannolikheten för 4 *krona* i följd vid kast med ett mynt är ju $(1/2)^4 = 1/16$ men sannolikheten för *varannan krona, varannan klave* på 4 kast är 1/8. Utfallet i första kastet kvittar ju.

Sannolikheten för att ett chokladhjul med 36 nummer stannar på t ex 13 tre gånger i följd är bara 1 på 46 656 men sannolikheten för att det stannar på tre på varandra följande nummer är en på 1 296. Däremot är sannolikheten för att det stannar på just 13, 14 och 15 lika stor som för 13 tre gånger i följd.

Sannolikheten för att en 5-barnsfamilj har 5 pojkar (flickor) är en på 32. Sannolikheten för att ett eventuellt sjätte barn också är en pojke (flicka) är ändå fortfarande 0,5 (i verkligheten 0,515!).

Sannolikheten för att man ska få 13 spader vid en giv i bridge är inte särskilt stor, faktiskt bara 1 på l,6 biljoner. Inte undra på att det blir stora tidningsrubriker när det någon gång händer. Däremot blir det inga tidningsrubriker om given ser ut som på bilden. Ändå är chansen att få just den given precis lika liten som att få 13 spader. Däremot är den förstås inte lika intressant.



Chansen att få denna giv är 1 på 1,6 biljoner

Världens slumpartade uppbyggnad

De flesta av oss tänker nog inte på att nästan allt här i världen, t ex människosläktets utveckling, beror på slumpen och att väldigt lite egentligen styrs av människohand. Sannolikhetslära genomsyrar våra liv. Alla behöver lära sig elementära saker om sannolikhet som t ex multiplikationsprincipen, begreppet väntevärde, likformig sannolikhetsfördelning, relativa frekvensens stabilitet, etc. Det finns många enkla fakta och försök som man kan ta upp i den elementära undervisningen.

Parapsykologer, astrologer, stjärntydare, horoskopsfabrikörer, kristallkuleskådare och andra som utnyttjar människors godtrogenhet utnyttjar sannolikhetslära. Man kan t ex slumpmässigt förutsäga en människas ”karaktär” med 30 % sannolikhet – just dit astrologer m fl når.

Lästips

Aurell, B. m fl. *Matematik Gy.* Almqvist & Wiksell.
Hofstadtler, X. *Gödel, Escher, Bach: ett Evigt Gyllene Band.*
ICME. Proceedings of the Fourth International Congress on Mathematical Education.
Moscovich, X. *Lek med slumpen.* Bonniers.
Råde, L. Ed. *The Teaching of Probability and Statistics. Proceedings of the first CSMP International Conference.* Almqvist & Wiksell.
Råde, L. *Sannolikhetslära och statistik.* Prisma Magnum.
Weaver, W. *Fru Fortuna.* Prisma Magnum.