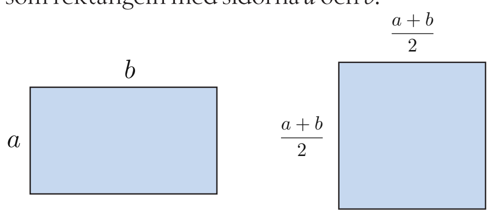
Pesach Laksman

Medelvärdenas släktskap och gestaltning

Det finns flera sorters medelvärden. Samband mellan tre av dessa diskuteras här samt åskådliggörs geometriskt. På *Nämnaren på nätet* finns uppgifter som kan användas i undervisningen.

Det medelvärde som oftast förekommer i och utanför skolans värld är det aritmetiska medelvärdet $m_a = \frac{a+b}{2}$. Det är så vanligt att man inte ens bemödar sig att påpeka dess särart utan vi kallar det rätt och slätt medelvärde och jag antar att ingen närmare presentation är nödvändig. Detta medelvärde kan åskådliggöras geometriskt genom att man lägger två sträckor *a* och *b* efter varandra på en linje och halverar den sammanlagda sträckan $a + b$. En illustration av detta är att betrakta sidan i en kvadrat med samma omkrets som rektangeln med sidorna *a* och *b*.



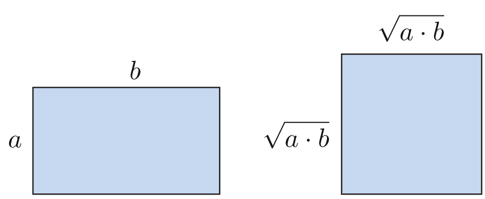
$$O = 2a + 2b \qquad O = 4 \cdot \frac{a+b}{2} = 2a + 2b$$

Sidan i denna kvadrat är det aritmetiska medelvärdet av rektangelns sidor.

Geometriskt medelvärde

Ett enkelt exempel på det geometriska medelvärdet kommer från finansvärlden. Låt oss säga att tillväxtfaktorn för ett kapital det ena året var 4 och det andra 9. Under de två åren har det skett en tillväxt motsvarande en tillväxtfaktor 6 per år om tillväxttakten hade varit lika stor under bägge åren.

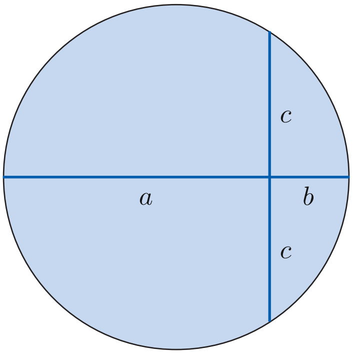
Går vi till geometrins värld motsvaras geometriskt medelvärde av sidan i en kvadrat som har samma area som rektangeln med sidorna *a* och *b*.



$$A = ab \qquad A = \sqrt{a \cdot b} \cdot \sqrt{a \cdot b} = ab$$

Det geometriska medelvärdet räknas ut med formeln $m_g = \sqrt{a \cdot b}$. Om rektangelns sidor är *a* och *b* så är kvadratens sida $\sqrt{a \cdot b}$.

Konstruktion av geometriskt medelvärde



För att konstruera ett geometriskt medelvärde till två sträckor tar vi hjälp av kordasatsen. Den säger att om två kordor i en cirkel skär varandra så är produkten av den ena kordans delar lika stor som produkten av den andra kordans delar.

Man lägger helt enkelt de två sträckorna *a* och *b* efter varandra. Därefter konstruerar man en cirkel med den sammanlagda sträckan som diameter. Diametern har alltså längden $a+b$. Nu är det bara att dra en normal till diametern i punkten där de båda sträckorna *a* och *b* möts. I figuren har denna normal längden $2c$. Det geometriska medelvärdet, *c* i figuren, är då hälften av den vinkelräta kordan till diametern. Detta på grund av att produkten av kordans lika delar $(c \cdot c)$ är lika med produkten av diameterns delar $(a \cdot b)$ vilket leder till att $c = \sqrt{ab}$.

Med den vetskapen kan man finna rektanglar med lika stora areor. Då kvadrater är specialfall av rektanglar kan samma teknik användas vid konstruktionen av en kvadrat med samma area som en given rektangel.

Konstruktionen kan även betraktas som ett geometriskt bevis för att det geometriska medelvärdet är mindre eller lika med det aritmetiska. Det aritmetiska medelvärdet av sträckorna är radien, medan det geometriska medelvärdet är hälften av den senast ritade kordan. Det faktum att diametern är den längsta kordan i en given cirkel ger att det geometriska medelvärdet är högst lika lång som det aritmetiska.

Harmoniskt medelvärde

Rent spontant skulle nog många elever säga att mitt emellan 1/2 och 1/4 ligger 1/3 . Ni som läser denna artikel gör nog inte sådana misstag. Avståndet mellan 1/2 och 1/3 är större än mellan 1/3 och 1/4. Däremot kan vi påstå att 1/3 ligger i intervallet mellan 1/2 och 1/4. Jag tror att många skulle vilja se 1/3 som medelvärde och som tur är går drömmar ibland i uppfyllelse. Det är nämligen ett exempel på det harmoniska medelvärdet $m_h = \frac{2ab}{a+b}$.

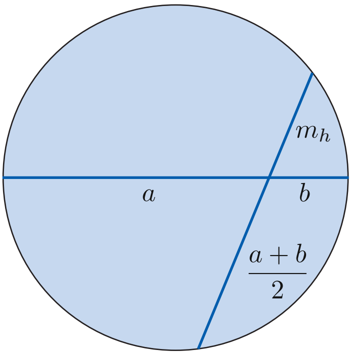
Redan Pythagoras talade om harmoniskt medelvärde (Unenge, 1980). Det som kan vara mer intressant är i vilka sammanhang man kan använda harmoniskt medelvärde. De är inte särskilt ofta behandlade i våra läromedel men kan då och då bjudas till elever i form av utmanande problem. En sådan uppgift är följande.

> En vinterdag kör Lena bil till och från jobbet. Till jobbet har hon medelfarten 90 km/h. När hon åker hem är vädret sämre och hon kör med medelfarten 30 km/h. Vilken är hennes medelfart på hela resan till och från jobbet?

Denna uppgift fick elever som deltog i högstadiets matematiktävling 1992/93. Tanken var inte att eleverna i förväg skulle veta något om harmoniskt medelvärde utan lösa det med logikens kraft. Problemet är en bra inledning till att så småningom behandla detta medelvärde. I boken *Rika matematiska problem* finns ett problem med namnet *Klippa gräs*.

> Jenny klipper gräsmattan hos Bo på 2 timmar. Mona gör det på 4 timmar.
> a) Hur lång tid tar det om de hjälps åt?
> b) Hitta på ett liknande problem och lös det.

På en timme klipper de då 1/2 + 1/4 = 3/4 av gräsmattan. Om det tar en timma att klippa 3/4 av gräset, borde det ta 20 min att klippa 1/4. Alltså tar det 1 tim och 20 min (eller 1 och 1/3 tim) att klippa gräset. Här får man som resultat hälften av det harmoniska medelvärdet, $\frac{2\cdot4}{2+4} = \frac{8}{6}$. Ett annat exempel kan vi finna i artikeln *Effektiv population* i Nämnaren nr 1, 2010. Effektiv population beräknas där som dubbelt harmoniskt medelvärde.



Konstruktion av harmoniskt medelvärde

Det harmoniska medelvärdet kan åskådliggöras genom att vi betraktar den andra sidan i en rektangel med arean *ab* där den första sidan är $\frac{a+b}{2}$. På samma sätt som tidigare konstruerar vi en cirkel med diametern som är summan av två sträckor *a* och *b*. Från den punkten där sträckorna möts avsätter vi en sträcka lika lång som cirkelns radie, så att dess ändpunkt hamnar på cirkelns periferi. Därefter förlänger vi sträckan åt andra hållet tills vi får skärningspunkten med cirkeln.

Med kordasatsen får vi att $a \cdot b = \dfrac{a+b}{2} \cdot m_h$.

Förlängningen är just det harmoniska medelvärdet. Även här talar bilden sitt tydliga språk. Vi ser nu att $m_h \leq m_g \leq m_a$.

Samband mellan tre medelvärden

Matematikvärlden är så uppbyggd att det finns många kopplingar mellan olika idéer och det är väl det som är dess skönhet. Medelvärden är, som tur är, också bundna till varandra i den idealiska verkligheten.

$$m_h = \frac{2ab}{a+b} = \frac{ab}{\frac{a+b}{2}} = \frac{\sqrt{ab}^2}{\frac{a+b}{2}} = \frac{m_g^2}{m_a}$$

Av ovanstående följer att $m_h \leq m_g$.

Fler värden?

De medelvärden som behandlas i artikeln baseras på två värden. Inga generella slutsatser kan dras om att påståendena skulle gälla även för medelvärden av fler värden. Dock är matematiken så beskaffad att generaliseringar oftast finns och därför kan det vara lockande att försöka finna dem.

Hur skulle det då kunna se ut med medelvärden byggda på tre värden? Rektanglar i våra modeller ersätts då av rätblock och kvadrater av kuber. Det geometriska medelvärdet kommer då att motsvaras av kanten i en kub med samma volym som rätblock med kanterna *a, b* och *c*.

Låt oss också titta på formeln för harmoniskt medelvärde $m_h = \frac{3abc}{ab+ac+bc}$

Denna formel kan skrivas om enligt $m_h = \dfrac{3abc}{ab+ac+bc} = \dfrac{abc}{\frac{ab+ac+bc}{3}}$

där nämnaren är ett aritmetiskt medelvärde av ytors areor. Tolkningen av m_h är då höjden av ett rätblock som har samma volym som ett rätblock med kanterna *a, b* och *c* och med en basyta vars area är det aritmetiska medelvärdet av de tre olika begränsningsytorna *ab, ac* och *bc*. Detta är i analogi med harmoniskt medelvärde av två värden.

LITTERATUR

Hagland, K., Hedrén, R. & Taflin, E. (2005). *Rika matematiska problem*. Stockholm: Liber.

Laksman, P. (2010). Effektiv population – möte i en fjäderfäförening. *Nämnaren* nr 1, s 27–29.

Unenge, J. (1980). Pythagoras – kateter, komma och harmonier. *Nämnaren* nr 4, s 5.

Arbeta vidare med olika medelvärden

Om du har inspirerats av matematiken kring medelvärdena, kan du och dina elever arbeta vidare med uppgifter som finns på Nämnaren på nätet. Där finner du texten *Tre olikheter* om uppgifter som Svante Silvén och David Ström utarbetat för sina gymnasieelever. I texten beskriver de hur lärare och elever tillsammans kan arbeta med bevis för hur de olika medelvärdena hänger samman.

Författarna inleder med en rätvinklig triangel inskriven i en cirkel och beskriver därefter hur generella resonemang kring aritmetiskt, geometriskt och harmoniskt medelvärde kan utvecklas hos eleverna. Silvén och Ström bygger stegvis upp undervisningen för att stötta elevernas tankegång så att de utvecklar generella resonemang kring medelvärdena och de tre olikheterna.