

Problem från klockan och kalendern

Lars Nystedt

Matematikbiennalens tema är "Tid för matematik". En av föreläsningarna behandlade problem som har anknytning till klockan och kalendern. Ur en almanacka kan många intressanta problem konstrueras, problem som anknyter till frågor som många elever har och många vuxna. Vem har t ex inte funderat över varför solens upp- och nedgång inte ligger symmetriskt runt tolvslaget? Det finns också goda möjligheter att ge ett historiskt perspektiv på uppgifterna. Ämnet har också ett allmänt bildningsintresse, för såväl elever som lärare.

Jag hör till dem som anser att humanistisk kultur och kunskaper i kulturhistoria är en nödvändig ingrediens i ett samhälles andliga liv och därför bör ingå i skolans undervisning.

Att försöka hålla reda på tidens gång är ett av mänsklighetens tidigaste problem. Det har vi arbetat med sedan urminnes tider. Det gör att matematiska problem som har med tid att göra ofta har en bakgrund av kulturhistoria. Jag vill ge ett exempel.

I antikens länder runt Medelhavet delades dagens ljusa tid in i tolv lika långa timmar med början vid soluppgången. Historiska bevis för denna indelning finns i Bibeln, t ex i liknelsen om trädgårdsmästaren som gick ut i elfte timmen för att leja arbetare. I passionshistorien står att Jesus gav upp andan vid nionde timmen. Emellertid är dagarna längre sommartid än vintertid. Det gör att även timmarna var av olika längd. I stort sett hade man två hjälpmedel för att mäta tid: dels solur, gnomon, dels vattenur, klepsydror. Dessa fungerade ungefär som timglas. Man lät vatten rinna ner i en smal stråle i ett kärl. Det fanns graderingar som visade hur högt vattenytan skulle stå efter en timme, två timmar osv. Det finns antika klepsydror bevarade

som har två graderingar, en för sommarens längre timmar och en annan för vinterns kortare. Ordet klepsydra är etymologiskt intressant. Det består av två led: dels klep som betyder tjuv, – vi har det i ordet kleptomani – dels hydra som betyder vatten. En klepsydra är alltså en vattentjuv. Här har vi bakgrund till ett problem:

Om vi skulle räkna timmar på samma sätt som i antiken; hur långa skulle årets längsta och årets kortaste timmar vara?

För att lösa detta problem måste eleven gå till en almanacka. I de flesta kalendrar finns tabeller över solens upp- och nedgång vid fem horisonter i Sverige. Man kan också observera att svaret blir ett annat i Göteborg än om vi gör beräkningar för Stockholm eller Lund – och framför allt Kiruna! Kanske en intresserad elev kan hålla ett kort föredrag om varför det är så.

Problemet blir genast svårare om vi frågar efter samma siffror för t ex London eller, ännu svårare, Alexandria. Det kanske inte är så svårt att finna uppgifter för London i en engelsk Nautical Almanach, men var får man tag i en astronomisk almanacka över Alexandria?

Jag har valt orten Alexandria därför att där låg antikens väldiga bibliotek, grundat av Ptolemaios I Soter (ej att förväxla med

Lars Nystedt har varit universitetslektor i matematik vid Stockholms universitet.

den store astronomen Ptolemaios), och som förstördes i omgångar, första gången år 47 fKr då Caesar belägrade Alexandria och slutgiltigt ca 400 e Kr. Flera stora matematiker verkade där, bla Eratosthenes som mätte jordens omkrets. Det skulle kunna vara av intresse att låta en elev hålla föredrag om bibliotekets historia.

Ännu svårare blir det om vi anger en viss latitud, t ex 45 grader, och ställer samma fråga för den latituden. Finner man ingen lämplig astromisk almanacka, måste man ta till rymdtrigonometri, och då blir problemet genast ett svårt problem på gymnasienivå, som exempelvis kan ges som enskild uppgift till en bra elev.

Decimalt eller sexagesimalt

Vi tillämpar i Sverige det decimala mått-systemet sedan 1889. Alla sorter är numer decimala och sortförvandlingar sker (till skillnad från tidigare) med en faktor 10, 100 eller 1000. Det går tio decimeter på en meter, tusen millibar på en bar, hundra gram på ett hekto och tusen volt på en kilovolt. Det vill säga – alla sorter utom de som mäter tid (och vinklar). Det går 60 sekunder på en minut och sextio minuter på en timme. Detta gör att det blir en annan matematik att räkna med klockan än att räkna med meter och kilo. Allt detta är minnen från babylonisk tid då man inte hade ett decimalt talsystem utan ett sexagesimalt system. Kanske en elev skulle kunna berätta om den babylonska kilskiftens sexagesimala sätt att beteckna tal.

Det är också sant att vi säger "tusen tack" och inte "ett kilotack"!

Står solen i söder klockan 12?

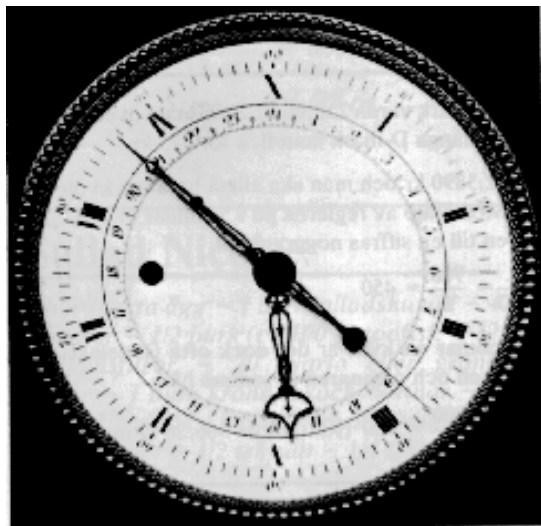
När vi ändå har almanackan uppe – låt oss titta efter när på dagen solen står rakt i söder, dvs högst upp på himlen. Det bör bli precis klockan tolv. Men så är det inte. Det sker mitt emellan solens upp- och nedgång,

vilket 1 jan blir i Stockholm kl 11.51 och i Göteborg samma dag kl 12.15. Varför blir det inte klockan tolv, och varför blir det en skillnad på 24 min mellan hur det är i Stockholm och i Göteborg? Solen går 360 grader på 24 timmar – hur långt hinner den på 24 minuter? Stämmer det med den verkliga skillnaden i longitud mellan de två städerna? Här kan man berätta om – eller låta en elev berätta om – lokal tid och svensk normaltid som skulle vara gemensam för hela riket. Den blev nödvändig när järnvägen kom, och infördes 1878.

Vi fortsätter att titta i almanackan. Både den 8 dec och den 22 dec 2000 går solen ner kl 14.46 i Stockholm, men uppgången skiljer sig 14 minuter. Detta innebär att tidpunkten på dagen då solen står rätt i söder har flyttat sig 7 minuter på 14 dagar. Kanske detta skall undersökas vidare. Man kan låta elever göra ett diagram över när på dagen solen står i söder för olika tidpunkter på året. Resultatet blir att tidpunkten när solen står i söder varierar med upp till 32 minuter. Dygnen är alltså inte lika långa. Årets längsta dygn är ca 40 sekunder längre än det kortaste. För att få lika långa dygn året runt blir vi tvingade att uppfinna en sk medelsoltid. Skillnaden mellan medelsoltid och verklig soltid kallas för "tidsekvationen" och var känd redan i antiken. Ptolemaios talar om den i sitt stora verk *Almagest*. Det är imponerande att man kunde upptäcka den med de primitiva instrument man då hade till förfogande. En intresserad och skärpt elev kan få i uppgift att studera varför tidsekvationen uppstår. Medan vi talar om klockan –

Hur fort rör sig de olika visarna? Hur många vinkelsekunder hinner t ex timvisaren på en sekund? Vad blir svaret om vi räknar i "gon" av vilka det går 400 på ett varv? Vad blir svaret om det skall ges i radianer?

Resultatet blir mycket förvånande om man betänker att geodeterna i slutet på 1700-talet kunde mäta vinklar med en noggrannhet av en vinkelsekund!



Decimalklockan

Under franska revolutionen beslutades om en decimal klocka. Den skulle ha tio timmar på ett dygn, hundra minuter på en timme och 100 sekunder på en minut. Urtavlan brukade göras sådan att timvisaren gick fem timmar på ett varv, dvs två varv på ett dygn. Här kan vi göra en enkel sortförvandling.

När den decimala klockan är t ex 7.30; vad är då en "normal" klocka?

När den decimala klockan är 7.70; vad är då en "normal" klocka?

Detta kan en god elev på mellanstadiet klara av. 7.30 är kanske litet väl lurigt valt. Många kommer att tro att det är "halv åtta", men "halv åtta" är 7.50. Naturligtvis kan man sortförvandla åt andra hållet med.

När vår klocka är halv åtta; vad visar den decimala klockan?

Det kan tilläggas att den decimala klockan inte blev någon succé. Den "glömdes bort" redan efter halvannat år. Den intresserade rekommenderas ett besök på Musée Carnavalet i Paris. Där finns decimala klockor utställda. Det kan dock påpekas att sekunden numera delas in decimalt i tiondelar och hundradelar, och inte i sextiondelar, som den i logikens namn egentligen borde göras.

För övrigt kan vi titta på klockan och konstatera, att då och då står två visare rakt ovanpå varandra.

Hur stora är tidsmellanrummen mellan att t ex timvisaren och minutvisaren eller timvisaren och sekundvisaren helt överensstämmer?

Vi antar att klockan har en sekundvisare som rör sig jämnt och inte hackigt som ofta är fallet. Kan det inträffa att alla tre visarna överensstämmer? (Utom kl 12.00 förstås.) Vi kan ställa samma frågor för den decimala klockan som för vår vanliga klocka, dvs: Med hur långa mellanrum står två visare rakt över varandra? Vi kan också fråga följande:

Finns det någon indelning av dygnet i x antal timmar och någon indelning av timmen i y minuter och minuten i z sekunder på sådant sätt, att alla tre visarna vid någon viss tidpunkt antar samma läge?

Lokal tid

Vi har tidigare berört skillnaden mellan nationell tid och lokal soltid. År 1884 samlades man till en konferens i Washington för att samordna klockorna i hela världen. Det var då det bestämdes att man skulle utgå från Greenwichmeridianen och för övrigt dela in världen (i princip) i 24 tidszoner. Det kan bli en bra studieuppgift för en grupp att på en världskarta följa utvecklingen världen runt under två dygn från midnatt till midnatt och illustrera under dygnets gång vad klockan är och vilken dag det är på olika ställen på jorden. Observera att det finns två datumgränser, en fast och en rörlig.

Det nuvarande systemet var dock endast ett av flera förslag vid konferensen. Ett annat av dem var följande: *Vi gör inga zoner, utan alla klockor i världen skall gå likadant som GMT, dvs som klockan i Greenwich.* Det skulle naturligtvis få till följd att i somliga länder låg man och sov mellan, säg 10 och 18 och affärerna öppnade kl 20 och stängde kl 04. Vitsen med detta system är, att det inte blir någon datumgräns. Dagarna byts lika över hela jorden. Måndag blir tisdag över hela jorden i samma ögonblick det sker så i Greenwich.

Hur skulle man då förklara att man vinner en dag genom att färdas jorden runt österut, som Phileas Fogg gjorde i Jules Vernes roman? Det finns ju ingen datumgräns längre.

Jordens, månens och solens tid

Det finns ett område till där förhållandena mellan de olika sorterna inte är decimalt, och det är kalendern. Det är dessutom ett område där vi människor inte helt råder över sorterna. De är oss givna av dels jordens rotation, dels solens och månens vandring över vår himmel. Det astronomiska sambandet mellan (medelsol)dygn, månad och år är inte ens givna av heltal. I våra kalendrar däremot skall förhållandena ges som heltal. Det skall gå ett heltal antal dagar på en månad, respektive ett år.

Den minsta enheten är dygnet som alltså är den tid det tar för jorden att snurra ett varv. Men vad är ett varv? Skall det räknas efter (medel-)solens varv eller efter en stjärnas varv? Stjärndygn, det sideriska dygnet, är litet kortare än medelsoldygn eftersom det går exakt ett sideriskt dygn mer per år än medelsoldygn.

Varför är det så, och hur mycket kortare är det sideriska dygnet än medelsoldygn?

Nästa storhet är en rent mänsklig konstruktion, nämligen veckan som består av exakt sju dygn. Det finns inget fenomen på himlen som motiverar sjudygnsvveckan. Observera att veckan är oberoende av sorterna månad och år. Veckodagarnas följd fortsätter som vanligt, oberoende av om det blir en ny månad eller ett nytt år.

Ytterligare nästa storhet är den tid det tar för månen att fullborda en cykel av växande och avtagande. Detta kallas för en synodisk månad eller lunation. Den cykeln har givit upphov till vårt begrepp månad. Observera att begreppet "nymåne" har två betydelser. Det kan dels betyda den smala skära som är den synliga nymånen, men det kan också betyda den tidpunkt då månen står i samma riktning som solen och antingen är osynlig eller förorsakar sol-

förmörkelse. I vår kultur har vi manipulerat månvarvet, så att en månad har blivit en mycket konstig sort som kan vara 28, 29, 30 eller 31 dagar. Vilken annan sort kan uppföra sig så? I islamska länder är det däremot så att en ny månad börjar när två personer inför en ansvarig person vittnat att de verkligen sett nymånen. En synodisk månad är 29,53059 medelsoldygn. Men en kalenders månad skall vara ett helt antal dygn. Den islamska månaden är alltså omväxlande 29 och 30 dagar lång.

Ett år, som består av tolv sådana månader, hur många dygn blir det?

Vad händer med nyårsdagen i ett sådant år?

Hur länge dröjer det innan det islamska nyåret har gått ett varv runt det västerländska året?

En utvikning är här på plats. Det är ofta viktigt att veta med vilken noggrannhet en uppgift är given.

Den synodiska månaden anges till 29,53059 medelsoldygn. Vilken skillnad i minuter och sekunder blir det om sista siffran hade varit en åtta i stället för nia?

Som alla har lagt märke till, går månen upp senare och senare för varje dygn som förflyter i månvarvet. Vad kommer detta sig, och hur mycket senare står månen rakt i söder för varje dygn som går?

Hur långt är ett år?

Betydligt besvärligare än att bestämma månvarvet var det att bestämma hur långt det mycket längre varv som vi kallar år är. Hur skall man kunna mäta årets längd? I vissa länder kan man få hjälp av årliga fenomen. I Egypten, tex, började Nilen stiga vid en viss tidpunkt för att senare svämma över. Man kunde också lägga märke till att flyttfåglarna kom eller att björkarna slog ut. Men om man räknar antalet dagar som gått från det att björkarna slår ut ett år och tills de slår ut nästa år, är det inte säkert att man får rätt svar. Lövsprickningen kan vara tidig ett år och senare nästa år.

Numera vet vi att årstidsåret, det tropiska året, är 365,2422 medelsoldygn. I det faraonska Egypten lät man året ha 360 dagar plus fem överskjutande dagar, sk epagomener. Det blev litet fel. Vad hände då?

Julius Caesar utfärdade år 46 f Kr en förordning om en kalenderreform som innebar att tre av fyra år skulle ha 365 dagar, under det att det fjärde året skulle kallas bisextilt (ordet "bisextilt" har också en intressant historia) och ha 366 dagar.

Vilken längd på året motsvarar det?

Hur många minuter och sekunder skiljer sig det tropiska året och ett sådant kalenderår åt?

Hur många år tar det innan skillnaden mellan de två sätten att räkna åren uppgår till ett dygn?

Under århundradenas gång växte skillnaden såpass mycket att det blev till ett problem, framför allt vid beräkningen av när påsken skulle infalla. År 1582 beslöt påven Gregorius XIII om en kalenderreform, som innebar att jämna sekelår inte skulle vara skottår, försåvitt inte sekelsiffrorna är jämnt delbara med fyra. På fyrahundra år blev det alltså 97 och inte hundra skottår.

Vad ger det för längd på kalenderåret?

Hur många år dröjer det innan det ackumulerade felet uppgår till ett helt dygn?

Längderna på lunationerna respektive solåret är mycket ojämförbara. Under antiken blev man därför mycket lycklig över att finna en period som "nästan" bestod av både ett helt antal år och ett helt antal lunationer. Två sådana perioder var åttaårsperioden octaëteris och (i synnerhet) den 19-åriga Metons cykel.

Hur mycket skiljer sig den metonska cykeln från ett heltal antal lunationer?

Påsken skall infalla första söndagen efter första fullmåne efter vårdagjämningen. Det kan vara av intresse att veta att det ännu efter Gregorius reform rör sig om en kalenderisk fullmåne beräknad efter Metons cykel och inte om den "verkliga", astronomiska fullmånen. Skillnaden mellan de två fullmånarna kan uppgå till ett par dygn.

Lästips

Nystedt, L. (1995) *På tal om tal*. Djursholm: Instant Mathematics.

Nystedt, L. (1998) *Historien om metern och kilot*. Djursholm: Instant Mathematics.