Tar vi vara på matematikhistorien?

Bengt Ulin

I de senaste kursplanerna betonas matematikens historia. Här ges exempel på hur denna kan integreras i undervisningen för att vitalisera problemlösning och begreppsbildning. Både människorna och matematiken kan utgöra innehåll i och göra ämnet spännande och intressant.

Världshistoria, svensk historia, idéhistoria, konsthistoria och musikhistoria har sedan länge en väl motiverad plats i skolan. Matematikhistoria har däremot fört en undanskymd tillvaro till för ett par år sedan, då de nya kursplanerna tog upp matematikhistoria som ett viktigt inslag i undervisningen. På senare tid har glimtar ur matematikhistorien fått ett betydligt ökat utrymme i läromedlen.

Givetvis går matematikhistorien långt tillbaka – till våra äldsta urkunder. Det rör sig om ett mycket omfattande material: matematik i olika kulturer, matematik som grundval för andra vetenskaper och för tekniska framsteg, utveckling av olika matematiska områden och inte minst biografier över en rad lysande matematiker – ibland inspirerade av frågor från ”amatörer”.

Hur tar vi vara på dessa skatter, så att inslagen inte blir vignetter för den goda sakens skull utan vitaliserar problemlösning och begreppsbildning och därmed blir organiskt integrerade i undervisningen?

Skolmatematiken omfattar som bekant en rad områden, främst aritmetik och algebra, funktionslära, geometri, sannolikhetslära och statistik. Till vart och ett av dessa fält finns fascinerande kapitel inom matematikhistorien. Utrymmet i denna artikel tillåter inte mer än att jag ger exempel på inslag av historia som inte bara utgör ett stoff utan också innehåller kvaliteter som ”går på djupet”.

***Bengt Ulin** är lärare vid Kristofferskolan i Stockholm.*

Tidig räkning

Förmågan att räkna var på sätt och vis långt utvecklad både i Fornegypten och Mesopotamien, Tvåflodslandet mellan Eufrat och Tigris. Väl att märka, långt utvecklad hos en mycket liten elit av kunniga. Skillnaderna mellan dessa kulturers matematik är påfallande. Exempelvis använde Tvåflodslandets folk ett system med sextio som bas (liksom senare grekerna), medan egyptierna hade tio som bas. Det är häpnadsväckande att vi vid tidmätning och delvis vid vinkelmätning efter ca 4000 år använder sextiosystemet!

Fornbabylonierna gjorde med sin kilskrift ansatser mot ett positionssystem, egyptierna däremot hade symboler, fasta bilder, för grundtalen 1, 10, 100, etc, alltså långt ifrån ett positionssystem. Där fanns inte något behov av nolla.

Under en vecka i åk 9, då vi behandlar talsystem, brukar jag ge eleverna en övning, givande både för elever och lärarstuderande.

> Tänk er att ni är stenåldersfolk.
> Hur många stenyxor har ni?
>
> Räkna stenyxorna och ange antalet med hjälp av bildsymboler.
>
> Ni kan inte räkna längre än till fem och ni kan inte använda våra siffror.

Som stenyxor fungerar en hög gem bra. Åtskilliga deltagare radar upp gemen 5 och 5, men det blir tyvärr för många sådana grupper, dvs fler än fem. Och det kan inte överblickas. Vad göra? Jo, sammanföra 5 femgrupper i taget till större enheter, osv. På så sätt upptäcker deltagarna poängen med att låta potenserna av basen, i detta exempel 5, utgöra grundtal.

Ersätt bildsymbolerna för grundtalen med siffror, 0 – 4.

Undersök hur våra algoritmer fungerar!

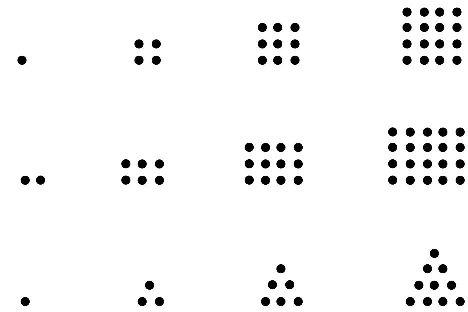
Beräkna 34 + 41, 23 – 14 och 4 · 23.

Efter en sådan övning som aktiverar deltagarnas egen fantasi och egna krafter kommer historiska glimtar om talsystem i skilda kulturer, även primitiva, att intressera klassen betydligt mer än annars. Historien känns meningsfullt integrerad i arbetet.

Den hellenska matematiken

Vi får naturligtvis inte hoppa över den hellenska kulturen. Språnget från den fornegyptiska och fornbabylonska matematiken, som i huvudsak var receptartad, till den grekiska är imponerande stort; med grekerna fick den matematiska bevisföringen sitt fulla värde, räknekonsten blev matematik. ”Vad hellenerna än har övertagit från barbarerna (så kallades andra folk!), de har alltid utvecklat det till högre fulländning” säger Platon i sin dialog *Epinomis*. Det är träffande. De grekiska matematikerna ville med sitt eget tänkande pröva om ett resultat var hållbart. De övade upp ett självmedvetande och kom på så sätt att vara långt före sin tid.

Det logiska tänkandet föddes och utvecklades i det forna Grekland. Väl att märka tog deras logik så ofta som möjligt hjälp av det bildartade, det åskådliga, gärna vackra. Pythagoreerna (500 –400 f Kr) ritade sk figurerade tal, punktgrupper som illustrerade kvadrattal, rektangeltal, triangeltal m fl typer av tal. De studerade heltalsförhållanden med hjälp av sina monokord, ensträngade instrument, och fann därvid sköna exempel på hur heltalen väver i musiken och den fysiska världen.



Studera figurtalen.

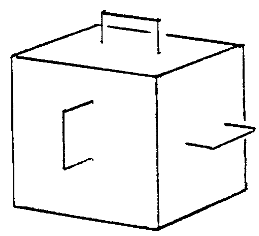
Vilket är nästa tal? Hur vet du det? Beskriv hur figuren växer.

Vad får man om man lägger samman två på varandra följande triangeltal?

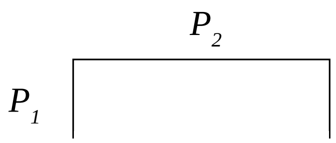
Geometri

Den grekiska kulturen från ca 500 f Kr och 6 – 7 århundraden framåt var på alla sätt imponerande. Det var en blomstrande kultur som bl a gav matematiken en häpnadsväckande utveckling. Lysande insatser kom småningom att samlas i *Elementa*, ett verk omfattande 13 volymer, som i det sista bandet kulminerade i ett existensbevis för den regelbundna dodekaedern, en polyeder som har kongruenta hörn och begränsas av 12 kongruenta, regelbundna femhörningar. Bevisidén är intressant:

Man utgår från kuben såsom regelbunden polyeder och tänker sig ett ”fotbollsmål” uppställt i mitten av varje kvadratyta



Problemet blir nu att placera och dimen– sionera fotbollsmålen så att de två övre hörnen i varje mål, inalles 12 stycken, tillsammans med kubens 8 hörn kommer att utgöra de 20 hörnen i en regelbunden pentagondodekaeder. Målet erbjuder två parametrar: ”stolpens” höjd och ”ribbans” längd.



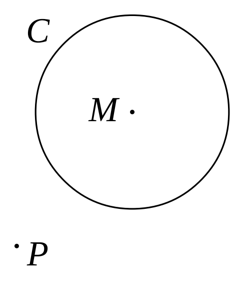
Att målen ska centreras kring kvadratens mittpunkt är lätt att förstå, likaså att målen på två angränsande kvadratytor ska bilda rät vinkel med varandra. Alltnog, grekerna lyckades föra beviset i hamn.

Mot slutet av 3:e århundradet f Kr var giganten Arkimedes verksam i Syrakusa. Hans och kägelsnittsexperten Apollonius insatser gav vid sidan av den epokbildande antologin *Elementa* arabisk och västerländsk kultur ett ovärderligt arv.

Rörande hellensk matematik vill jag också nämna Platons krav på att geometriska konstruktioner skulle utföras med passare och ograderad linjal, – en regel som man ibland medvetet överträdde för att kunna nå en del värdefulla resultat. Varför då kravet på passare och linjal? Låt oss se på ett exempel:

> Givet en cirkel *C*, dess medelpunkt *M* och en punkt *P* utanför cirkeln. Konstruera en av de två tangenter som kan dras från *P* till *C*.

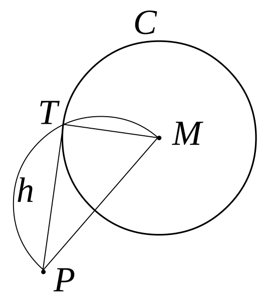
Här duger det inte att bara lägga linjalen intill *P* och *C* och sedan dra ”tangenten”. Det skulle bara vara en lösning med det fysiska ögat och ingalunda med det andliga ögat. Det räcker inte att med ögats hjälp tycka att linjalen tangerar cirkeln. Nej, det gäller att exakt konstruera den punkt i vilken den sökta tangenten måste tangera cirkeln. Vad innebär då ”exakt”? Det innebär att konstruktionens riktighet blir matematiskt bevisad, dvs fullt medvetet utförd. Här låg poängen med villkoret rörande passare och linjal. Med



dessa redskap som hjälpmedel skulle det logiska tänkandet och självmedvetenheten övas upp. Denna skolning har betytt mycket mer för vårt tänkande, både i vardag och i forskning, än vi kan ana. Grekerna blev världspedagoger.

Hur löste då grekerna tangentproblemet? De drog sträckan *MP*, delade den mitt itu, med passare och linjal, och slog sedan en halvcirkel *h* med *MP* som diameter. Den sökta tangeringspunkten är skärningspunkten *T*.

Bevis: Periferivinkeln i *h* vid *T* är rät, *Thales sats*, och eftersom en tangent möter radien i rät vinkel i tangeringspunkten ligger denna i *T*. Därefter är det bara att lägga an linjalen mot *P* och *T* och dra *PT*.



Den alltför långsamma renässans som skolgeometrin tyvärr erfar borde få skjuts av konstruktionsövningar med passare och linjal.

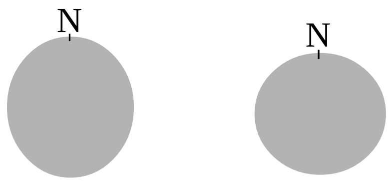
Några tekniska bragder

I samband med geometri och trigonometri kan man ta fram två exempel på tekniska bragder, båda utförda med matematik som grundval.

Omkring år 530 f Kr genomförde Eupalinos ett ca 1 km långt tunnelbygge genom berget Castro på ön Samos, den ö där Pythagoras växte upp. Tunneln sträckte sig från en vattenkälla uppe på berget ner till den hamnstad som fick namnet Pythagoreion. Motivet var att trygga stadens vattenförsörjning i händelse av belägring. Det minst sagt imponerande är att tunneln grävdes från båda håll! De två arbetslagen möttes halvvägs inne i berget. Det behövdes där bara en korrektion av 10 meter i sidled och 3 meter i höjdled för att förena de två tunnelhälfterna. Hur kunde Eupalinos ange de två tunnelriktningarna med sådan precision – i 3 dimensioner?

Efter två omsorgsfulla trianguleringar över Alpernas yta sprängdes under de åtta åren 1872 – 1880 den ca 15 km långa schweiziska järnvägstunneln från Göschenen till Airolo från två håll. Differensen vid mötet inne i massivet var 33 cm i sidled och endast 5 cm i höjdled – även det ett precisionsarbete.

En annan fascinerande insats är undersökningen av jordens form 1735-1737. Frågan gällde om jorden är citronformad eller avplattad vid polerna.



Den senare uppfattningen hade stöd hos ett antal fysiker, bl a Newton. För att definitivt skingra dimmorna sände en akademi i Paris ut två expeditioner, en till ekvatorns närhet i Peru och en till Lappland, dvs till en plats långt bort från ekvatorn. Båda expeditionerna skulle mäta längden av en meridiangrad, dvs den sträcka man behöver gå i nordlig riktning för att latituden ska öka med 1 grad. I mätningarna på Torneälvens is deltog bl a vår egen Celsius. Det visade sig att gradlängden i Lappland var 737 meter längre än i Paris och hela 1349 meter längre än den i Peru uppmätta längden. Gradlängden ökar alltså då man avlägsnar sig från ekvatorn, vilket i sin tur innebär att jordkrökningen minskar. Newton hade än en gång dragit det längsta strået. Jorden är avplattad vid polerna.

Funktioner

Newton och Leibniz lade fundamenten till modern funktionslära. De lade på olika sätt grunden till infinitesimalkalkylen. En rad betydande matematiker utvecklade senare funktionsläran vidare. Dels ökades skärpan i definitioner och bevis avsevärt, dels utvidgades fältet med nya, fruktbara områden, exempelvis analytiska funktioner. I likhet med andra vetenskaper var astronomin starkt beroende av matematiska framsteg. En novembernatt 1846 kom funktionsläran och Newtons gravitationsteori att fira en sagolik triumf. Astronomerna hade länge förargat sig över att planeten Uranus inte följde den bana som hade räknats fram. Som förklaring tänkte man sig att en ännu mer avlägsen planet utövade en dragningskraft på Uranus. Oberoende av varandra och nära nog samtidigt tog två matematiker itu med problemet, G. Adams i England och J. J. Leverrier i Frankrike. Ur ett vagt antagande om en okänd planet någonstans i rymden lyckades de räkna fram tabeller med vilkas hjälp den skulle kunna upptäckas. Adams fick dålig hjälp i Greenwich, men vid observatoriet i Berlin fann man den eftertraktade planeten omedelbart tack vare Leverriers vinkelvärden och nya stjärnkartor. Med matematikens hjälp hade man funnit Neptunus, en nål i en höstack, och fått ny kunskap om planetsystemet!

Aritmetik

Något som överträffar dikten kan vi hämta ur Gauss liv och det kan integreras mycket bra i grundskolan. Jag tänker på hur läraren ville få lugn och ro och därför gav den tioårige Gauss en uppgift att addera 100 stora heltal i rad. Pojken var snart framme med sin griffeltavla!

Beräkna 1 + 2 + 3 + 4 + …+ 100

Diskutera de lösningsförslag som kommer fram och berätta sedan om hur den ”omöjlige” Karl Friedrich flyttades till allt högre skolor. Berätta hur han hämtades med häst och fin vagn hemma hos den fattiga murarfamiljen och tillsammans med en professor fick audiens hos fursten av Braunschweig. Brodera gärna med god fantasi ut hur samtalet gick, hur fursten belåtet klappade det unga geniet på axeln och garanterade honom pengar för flera års högskolestudier.

Gauss hela liv visar en märklig struktur. Liksom den gången i skolan betade Gauss alltid av ett helt område när han tog itu med en enskild uppgift, i talteori, i astro-nomi, i teorin för ytor och i behandlingen av jordmagnetismen. Om Gauss bör också nämnas att han småningom blev ”kyligt olympisk”. Tyvärr gav han inte något erkännande åt ungraren Bolyai d y, vars far skrev till vännen Gauss och berättade att sonen påvisat existensen av en icke-euklidisk geometri. Det 2000-åriga problemet kring parallellaxiomet hade äntligen fått en lösning. Det var en upptäckt som Bolyai delade med Gauss och ryssen Lobatjevski. Den innebar en chock för bl a den kantska filosofin och gav helt nya perspektiv på rummet.

Människorna bakom

Om Gauss och många andra stora matematiker kan vi läsa i Nämnarens värdefulla Miniporträtt, en serie i nötskalsformat. Under utgivningsåren 1980 – 1988 finns i regel ett porträtt per nummer, de flesta skrivna av Jan Unenge. Ett av porträtten, som skrivits av Lennart Råde, handlar om *Florence Nightingale*, som vi får lära känna ur ett nytt och originellt perspektiv, som en av statistikens pionjärer. Med fyndigt gjorda diagram kunde hon inför myndigheterna visa vilken effektiv, ja drastisk, förbättring som hade åstadkommits i krigssjukvården på Krim, sedan hon fått ansvaret för den.(Nämnaren 86-87, nr 4)

Märkligt nog blev en matematiker den första kvinnliga professorn i Sverige, nämligen *Sonja Kovalevsky* (1884). Hennes insatser gällde främst differentialekvationer, men mer vignettartat kan och bör en del sägas om denna personlighet, inte minst att hon med en avhandling om rotation kring en fix punkt (1888) vann det mycket ärofulla franska Bordin-priset. Tävlingsbidragen insändes anonymt och juryn var så imponerad av det segrande bidraget att den höjde prissumman från 3000 till 5000 francs.

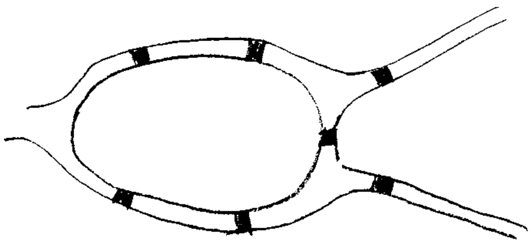
Som en intresseväckande läsestund kan man gärna någon gång läsa ur Kovalevskys bok om hennes barndom (på engelska: *A Russian Childhood*, 1983); den ger levande och tänkvärda närbilder från hennes uppväxt på ett gods och i St Petersburg.

En annan färgstark personlighet är *Johannes Kepler*, som efter tålmodigt och skarpsinnigt arbete upptäckte att planeterna beskriver ellipser, med solen i den ena brännpunkten, och inte cirklar kring solen, så som man räknat med under drygt två årtusenden. Det finns spännande skildringar av hur Kepler systematiskt forskade sig fram till de tre berömda lagarna och f ö om hur han mitt uppe i forskningar fick ingripa för att rädda sin mor från att bli bränd på bål som häxa.

Kepler hade som assistent en finmekaniker, en schweizare vid namn *Jost Bürgi*. Det är tyvärr ganska okänt att denne man redan år 1588 hade konstruerat ett förträffligt logaritmsystem och beräknat antilogaritmer för en ganska tät mängd av logaritmvärden. Bürgi utgick från den finurliga basen $1{,}0001^{10000}$ som med endast ca 5% skiljer sig från talet *e*, basen för de naturliga logaritmerna, det system som används i all avancerad matematik. På grund av en ovanlig tröghet att formulera sig i ord publicerade inte Bürgi sitt system förrän 1620, först efter energiska påstötningar från Kepler. Emellertid hade lord Napier då prioritet med ett, relativt invecklat, logaritmsystem som han offentliggjort 1614.

Efter konsultation med Napier i Edinburgh publicerade londonprofessorn Henry Briggs år 1624 de första 10-logaritmerna, som ännu långt in på 1900-talet kom att kallas för ”briggska logaritmer”.

Bland de stora matematikerna måste *Leonhard Euler* nämnas, en schweizare som under många år var verksam i St Petersburg med avbrott för en tid i Berlin. I bokverket SIGMA kan vi läsa Eulers pedagogiskt mönstergilla lösning av det klassiska problemet rörande de 7 broarna i Königsberg.



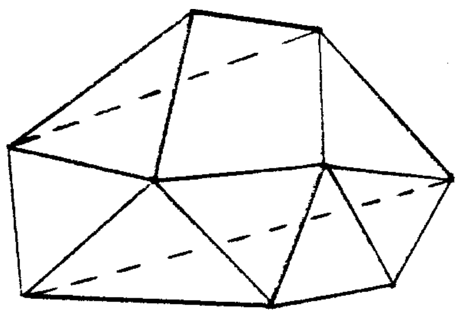
Genom Königsberg flyter floden Pregel. I floden ligger en ö, som har förbindelse med övriga staden via fem broar. Över flodarmarna går ytterligare två broar, så totalt finns sju broar. Kan man ta en rundpromenad på så sätt att man går över varje bro endast en gång.

Euler bevisar att man inte kan göra en rundvandring, så att man går en gång över varje bro. En vacker sats av Euler gäller antal ytor, hörn och kanter (y, h, k) i en massiv polyeder.

Rita några polyedrar. Gör olika spännande former. Hur många kanter, hörn och ytor har de? Gör en tabell över antalet. Vad upptäcker du?

Uppgiften kan användas som upptakt till en polyederstudie. Det blir spännande att se på y, h, k-tabellen och försöka upptäcka det vackra samband som Euler fann:

$$y + h = k + 2$$



Polyeder med
$y = 11$, $h = 9$ *och* $k = 18$

Om Euler berättas att han hade en tvåsiffrig barnaskara och att han hade en otrolig koncentrationsförmåga; han kunde arbeta med barnen jollrande kring skrivbordet. Euler hade en enastående intuition att spåra upp vackra och djupt liggande matematiska satser. Han intresserade sig också för rysk folkpedagogik och skrev en räknelära som höll sig aktuell i Ryssland i mer än ett sekel, dvs långt in på 1800-talet.

Litteratur

Det finns en mycket omfattande litteratur i matematikhistoria, stora verk från antiken till 1900-talet, specialartiklar och biografier. Listan skulle kunna göras mycket lång. Jag begränsar mig här till ett axplock.

Aaboe, A. (1989). *Antikens matematik från babylonierna till Ptolemaios*. Finland: Prisma Magnum.

Bachmann, E. (1973). *Att mäta himmel och jord.* Stockholm: Generalstaben.

Blom, G. (1992). ”Bilen och getterna – ett sannolikhetsproblem”. *Elementa* nr 3.

Caspar, M. (1958). *Kepler*. Stuttgart: Kohlhammer.

Dahl, K. (1991). *Den fantastiska matematiken.* Stockholm: Fischer & Co.

Dantzig, T. (1965). *Talen – vetenskapens språk.* Stockholm: Aldus.

v Dávid, L. (1951). *Die beiden Bolyai*. Basel: Birkhäuser.

Davis, P. J. & Hersh, R. (1983). *The Mathematical Experience.* London: Pelican Books.

Domar, T. (1988). Grafteori. *Nämnaren 15(2).*

Kline, M. (1968). *Matematiken i den västerländska kulturen.* Lund: Prisma.

Kline, M. (1979). *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times.* Oxford Univ Press.

Kovalevsky, S. (1978). *A Russian Childhood.* Springer Verlag.

Hall, T. (1965). *Gauss – matematikernas konung.* Stockholm: Prisma.

Nämnaren (1980 – 1988). Miniporträttet.

SIGMA (red J Newman) Särskilt band 1och 2.

Thompson, J. (1991). *Historiens matematik.* Lund: Studentlitteratur.

Unenge, J. (1997). *Människorna bakom matematiken.* Lund: Studentlitteratur.

Ulin, B. (1988). *Att finna ett spår.* Stckholm: Liber-Hermods.

Voellmy, E. (1948). *Jost Bürgi und die Logarithmen.* Basel: Birkhäuser.