

Matematik och demokrati

– när mötas de två?

Arnost Rusek

Artikeln handlar om orienterande och intresseväckande matematikundervisning vars syfte är att ge eleverna exempel på matematikens anknytningar till verkligheten och behoven av prognosinstrument.

Blåval

I Räkna med Vux, Grundbok, Etapp 1, från 1991 återfinns följande uppgift:

En blåval som fångades 1947 vägde ca. 150 ton varav endast tungan vägde 4,3 ton. Hur många procent av vikten utgjorde tungan?

I klass efter klass fick jag alltid svaret $4,3/150 = 2,86\%$. I klass efter klass har jag förklarat, att det inte går att väga en blåval ute till sjöss. Att det inte går att skära ut en valtunga perfekt, eller att ens väga den. Att eleverna lika gärna kunde räkna med $4/150$, vilket vore lättare. Eller varför inte $5/150$ eller $4/160$, vilket vore ännu lättare. Att det är ingen som vet om valen vägde 140 ton, eller 167 ton. Att jag inte bara skulle höftat till svaret, men även till siffrorna i uppgiften. Svaret i facit (3 %) förbryllade många av mina elever. Facit avrundade nästan lika friskt som jag! Förbluffande nog reagerade ingen. Jag upprepar, ingen reagerade över mitt val av uppgiften! Ingen anmärkte om det etiskt riktiga över att överhuvudtaget ha

Arnost Rusek är fil. kand i geologi. Han har arbetat som matematiklärare vid AMU-gruppen i Eslöv. För närvarande studerar han till gymnasielärare vid Lärarhögskolan i Malmö.

en sådan här uppgift i en matematikbok.

Denna erfarenhet av elevernas rädsla att handskas vårdslöst med siffror har lett till att jag så småningom har tagit fram ett antal lektioner i konsten att våga handskas med siffror på ett ledigare sätt. En introduktion till gissningens ädla konst i Monte Carlos tecken kan gå till så här.

Resan Eslöv – Lund

– Hur kan man göra, om man vill ta reda på avståndet härifrån till Lund?

– Man kan ta det på trippmätaren.

På tavlan skrev jag: **Mäta.**

– Man kan titta på en karta.

– Och när man har tittat på kartan – blir man klokare?

– Ja-a, för då ser man hur långt det är.

– Man får väl ändå mäta avståndet på kartan. Sen får man titta på skalan och räkna om det till mil?

– Nej, jag menar att om man är bekant med kartan, så *syns* det faktiskt hur långt det är. På tavlan skrev jag: **Titta på kartan.**

– Och om man inte känner till kartan?

– Ja, då får du räkna om det.

På tavlan skrev jag: **Räkna.**

– Du kan ringa till Fröken Ur. (Vilket väckte en viss munterhet.)

På tavlan skrev jag: **Fråga.**

– Finns det flera sätt?

– Man kan ju stega...

– Visst kan man gå. Förr i tiden gick man till Lund för att jobba. På morgonen gick man dit, på kvällen gick man tillbaka. Hur lång tid tog det? Hur långt är det till Lund?

– Det kan vara två mil.

– Två och en halv, faktiskt.

På tavlan skrev jag: **Gissa**. Under det skrev jag 2 mil och under det 2,5 mil.

– Du, jag gissade inte, faktiskt.

– Två och en halv mil. Menar du att det är på pricken två och en halv mil?

– Nä, inte precis...

– Du har höftat till det, något?

– Ja-a.

– Ok. Jag kunde lika gärna ha skrivit uppskatta som gissa. Skall jag ändra på det?

– Ja, det tycker jag.

På tavlan skrev jag: **Uppskatta** / framför **Gissa**.

– Ja, då så. Vi behöver flera gissningar. Jag vill att vi alla gissar.

Så småningom, med hjälp av lite övertalning, fick jag hela klassens medverkan. De flesta låg i närheten av två mil. Någon gissade på 5 mil, en annan på 5,3 mil och en gissade på 7,5 km.

– Ja. Det sättet att räkna som jag tänkte presentera idag kallas Monte Carlo och ...

– Varför just Monte Carlo?

– OK, vad gör man i Monte Carlo?

– Förlorar pengar?

– När man spelar roulett eller tjugo ett. Då vet man inte på förhand, vilket nummer, eller vilket kort det blir. Man får gissa. Vissa saker går helt enkelt inte att komma underfund med på annat sätt. Och då gissar man.

– Vad har det med matte att göra?

– Som sagt, det som går att beräkna på vanligt vis, det beräknar man. Sen finns det saker som inte går att beräkna och man vill ändå ha ett svar.

– Och då gissar man?

– Ja.

– Bara så där? Gissar?

– Du, det är inte bara så där. När vi nu gissade på avståndet till Lund, så är det faktiskt rätt kvalificerad gissning vi har fått

fram. Allesammans är vi boende här omkring. Hur tror du att kineser eller eldsländare skulle ha gissat på sträckan Eslöv-Lund? Skulle de ha haft en chans?

– Nej, men...

– OK, då. De här gissningarna på tavlan, vi fortsätter med dem. Om jag nu vill veta hur långt det är till Lund så stryker jag de sträckor, som avviker mycket. På tavlan strök jag, 5 mil, 5,3 mil och 7,5 km.

– Varför gör du det?

– Tja, jag tar bort det som avviker alltför mycket från det andra. Det är det hela.

– Men du vet att det är fel?

– Ja, det vet jag. Men även om jag inte visste, så skulle jag stryka dom. Just för att dom avviker så våldsamt från de andra. På resten beräknar vi ett medelvärde. Hur mycket blir det?

– Det vet jag inte.

– Jag vill att ni räknar fram det.

– 22,3 kilometer.

– Då så. Nu har vi med Monte Carlometoden beräknat avståndet mellan Eslöv och Lund. Är det det exakta avståndet?

– Det kan det väl ändå inte vara?

– Nej, det kan det inte. Vi har rätt så stort fel i beräkningen. Hur stort är det?

– ?

– Jo, det går att komma åt det. Man tar skillnaden mellan den största och den minsta rimliga gissningen och någonstans där emellan kan man vara rätt så säker att det rätta avståndet ligger. Hur mycket är skillnaden?

– 13 km.

– Hälften blir ungefär 7 km. Tja, vi kan säga att till Lund är det 22 + 7 km. Tja, omkring två, tre mil ungefär. Poängen när man gissar så här är, att man skall ha fler som gissar. Ju fler, desto bättre. Sen gäller det, att man får kvalificerade gissningar. Det gäller att få tag i folk som vet något om det man skall gissa. Och för det tredje så gäller det att de som gissar är engagerade. Att de har något att vinna på att gissa rätt – och något att förlora om de gissar fel. Om du satsade en tia, skulle du hugga till med 5 mil då?

- Nej, det skulle jag inte.
- Sen var det en sak till. Det är billigt att gissa. Jag menar, att köra till Lund, det kostar både tid och pengar. Att få tag i en karta tar också sitt. Om man är ute efter en uppskattning, ett närmevärde, så är Monte Carlo nog det bästa, billigaste och snabbaste sättet.
- Är det?
- Hur långt är det till Stockholm?
- 60 mil.
- Om vi nu gissar allihop igen, så skulle det ta sina fem till tio minuter. Vi skulle få ett tal i närheten av 60 mil i stort sett gratis. Dessutom är vi inte intresserade av att veta något annat. Vem skulle vilja veta om det är 611 km, 234 m eller 56,5 cm?
- Ingen?
- Det där med 60 mil är just det svar vi är ute efter. Det är väl ändå så?
- Ja.

Några principer

- Varför tror ni att man skall ha många som gissar? Det måste finnas folk som är experter på saker och ting? Som kan sina saker bättre än andra?
- Jag vet inte.
- Det hela började hos astronomerna. Om en astronom med anseende, förr i världen, skrev i en bok att han såg en dubbelstjärna där eller där, så gällde det även om ingen annan kunde se ett dyft. Någon gång på artonhundratalet, tror jag, blev det ändring. Sedan dess krävs det att fler människor kan bekräfta en observation, innan man accepterar den. Nu för tiden är det så att man skall ha fler som bekräftar en sak innan man tror på den. Ett experiment skall kunna upprepas av andra, annars gäller det inte.

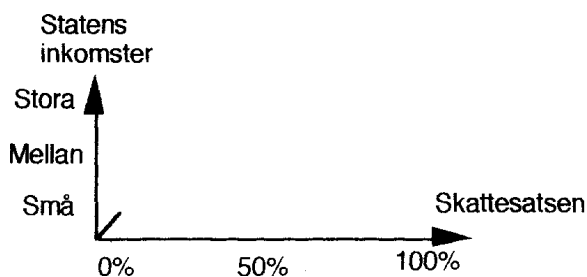
Sen har ni hela Östeuropa. Där styrde man med hjälp av experter. Min syster, som bor i Tjeckoslovakien, blev smått chockad när hon fick reda på att vi har haft folkomröstning om kärnkraften. Hon tyckte att det var hemskt, att två städerskors röster var mera värda än en experts som har studerat kärnkraften länge. Tack och

- lov sköttes Tjeckoslovakien bättre. Tyckte min syrra, alltså.
- Tycker du det också?
- Jag tycker att desto fler kockar, desto bättre soppa, men, kockarna skall veta att de måste äta av soppan också. Är det klart?
- Ja.
- Du, det heter inte Tjeckoslovakien längre.
- Nej, det gör det inte.
- Säg, har man någon nytta av det? Jag menar, det är väl ändå bara trams, det här?
- Ja du, har du varit på semester någon gång?
- Ja?
- Har du haft pengar med dig? Så att det räckte?
- Ja?
- Hur bar du dig åt? Jag menar, hur gjorde du för att få tillräckligt med dig? Inte satt du och räknade i förväg varenda bärs eller pizza du tänkte sätta i dig?
- Nä för katten.
- Hur gjorde du?
- Jag höftade till det och så tog jag lite till.
- Men du räknade alltså inte i förväg, redan här i Eslöv?
- Nej, nej.
- Jaha. Finns det fler exempel där man inte räknar med exakta siffror? Där man måste gissa? Eller där man vill gissa?
- I lumpen?
- Kan du säga något om det?
- Jo, jag menar att militären kan inte heller veta vad fienden har för sig, och då måste de väl gissa?

En ny start för Sverige

- Jag skulle vilja avsluta med ett exempel där vi alla gissar tillsammans, ett slags Monte Carlo i stort. Hur mycket skulle statskassan få in, om man avskaffade alla skatter i Sverige?
- Ingenting.
- Om man höjde skattesatsen till tio procent, hur mycket skulle man få in då?
- Lite mera.
- Skatteintäkterna skulle stiga, alltså?
- Ja.

På tavlan ritade jag kartesiska koordinater med *Skattesatsen* på x-axeln och *Statens inkomster* på y-axeln. Sedan ritade jag en punkt för *ingenting* och ett litet streck för *lite mera*.

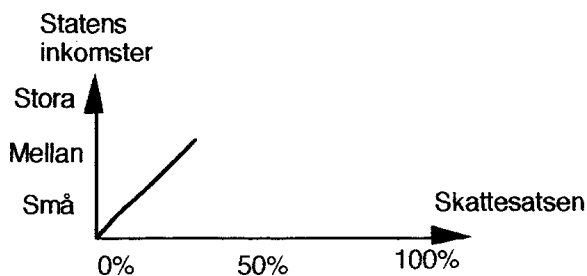


– Hur mycket skulle man få in, om man höjde skattesatsen till 20 procent?

– Lite till.
– Till 30 %?

– Ja, då går det ännu mera upp.

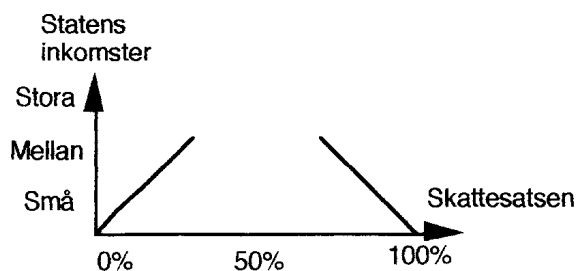
På tavlan ritade jag *lite till* och sedan förlängde jag strecket *ännu mera upp*.



– Nu räknar vi från det andra hållet. Hur mycket får staten in om skattesatsen är hundra procent?

– Allt.
– Allt?
– Ingenting.
– Ingenting?
– Det skulle inte gå att jobba.
– Varför det?
– Har man inget för det, så får det vara.
– Vad skulle du göra i stället, då?
– Plocka kottar.

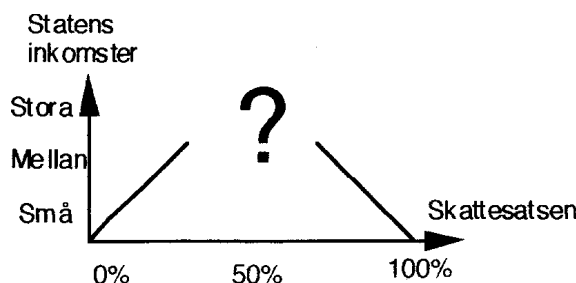
Vi kom överens om att Astrid Lindgren till trots skulle bara någon enstaka galning fortsätta arbeta vid en skattesats på 100 %. En skulle plocka kottar, några skulle fiska, andra skulle emigrera till Amerika. Sedan sänkte vi skatten i etapper till 70 %. På tavlan ritade jag *driva in lite*, *driva in lite mera*, *driva in ännu mera*.



– Vid de här skattesatserna i början och i slutet, är det faktiskt rätt så enkelt att med kända formler beräkna statens inkomster. Men hur gör man nu här i mitten?

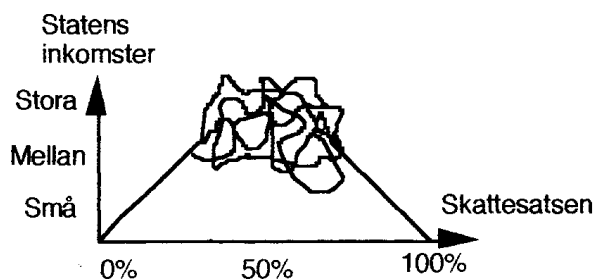
– Monte Carlo?

– Ja, det är det lektionen går ut på. Frågan är hur? Vilken linje, vilket samband gäller här i mitten? Befinner vi oss här / ? Eller här \ ? Eller rent av här –?



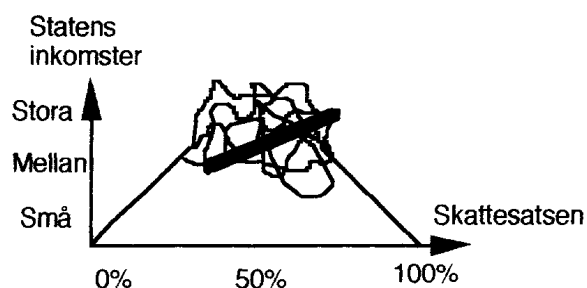
– ?

– Facit har jag hämtat från USA. Där har man noterat sambandet mellan skattesatsen och skatteinkomsten under de senaste hundra åren. Det ser ut så här.



– I mitten är det kaos. Ingen har hittills lyckats hitta något annat samband än kaos. Ingen vet om USA just nu befinner sig på en stigande, en fallande, eller en plan kurva. Ännu mindre vet man hur det blir om några år. Här i Sverige har vi också ett facit. För två år sedan hade vi val i landet. Då sänktes skatterna och det pratades om en *ny start för Sverige* och om *dynamiska effekter* – fler skulle arbeta – fylla statens skattkista.

– Du, det blev en jävla dynamik där jag jobbade. De sparkade nästan allihopa.
 – OK. Blev skattkistan full?
 – Nej, men det är krisen.
 – Och sossarna.
 – Fler skyldiga? Lyssna, jag är inte ute efter någons skinn. Men här gick faktiskt människor till ett val som till stora delar rörde sig just om skatter. Ingen av oss har en kristallkula. Alltså fick vi gissa. Skulle landet tjäna eller förlora på sänkta skatter? Alla hade vi något att vinna eller något att förlora på en bra eller på en felaktig gissning. Nu gissade vi fel. Det gick som det gick. Med sänkta skatter minskade statens inkomster. Grafiskt kan det visas så här.



– Jag menar, inte alltid kan man räkna rätt, inte ens med Monte Carlo. Men i nästa val, ja, då får vi rösta rätt.
 – Vad menar du med det?
 – Tja, inte är det meningen att staten skall låna 300 miljarder varje år, inte.

Kostnader och behov

– Men från det ena till det andra. Det är alltså rumsrent att gissa, i alla sammanhang. Militären använder sig av det, demokratierna bygger på det, vi höftar alla till saker och ting då och då utan att tänka på det. I matematiken har det dessutom fått ett namn, Monte Carlo och räknas som en särdeles flott beräkningsmetod. Det är snabbt, billigt, och ger i regel rätt så hyf-

sade resultat.

– Det är väl inte billigt med val heller?
 – OK, det är oftast billigt men inte alltid. När man nu tar fram något, antingen genom att mäta eller genom att räkna eller genom att uppskatta, att gissa, så gör man det inte för att man tycker det är skoj. Man gör det för att man behöver resultatet. Sedan är frågan, hur mycket och hur exakt det behöver vara och hur mycket man är beredd att betala för mätningen, beräkningen, gissningen. Jag tror att varje metod har sin tid och sin plats. Man skall helst inte göra för lite, men inte för mycket heller.

Avslutande reflektioner

Jag tror inte att jag lyckades rubba de många elevernas orubbliga övertygelse om att talen inte får hyfsas till. *Det här ju inte en matlagningskurs, där du kan salta först och sedan ta lite till efter smak, vi skall ju räkna här!* Men kanske någon blev påverkad. Kanske några tänker innan de räknar. Ibland nöjer de sig kanske med att tänka, dvs. med att ersätta en beräkning med ett överslag eller med en uppskattning. Ibland tom. med ren och skär gissning. Vilket inte vore dumt, gissar jag.

Under ht-93, under min praktiktid vid Bergaskolan i Eslöv, blev jag i skolans korridor stoppad av en elev. När jag inte genast kände igen honom, påminde han mig! *Det var väl du som har vikkat i Hörby och pratat om Monte Carlo?* Det är drygt ett och ett halvt år sedan som jag under en månads tid vikarierade på Frostaskolans högstadium i Hörby. Den gången kom vi aldrig till demokratiproblematiken. Vi gissade på avstånd mellan Hörby och Malmö och vi gissade på svar till uppgifterna i skolboken. Eleven går första året på NV-programmet och det går bra för honom.