Sten Kaijser

Uppfinna eller upptäcka?

Är matematiken upptäckt eller uppfunnen? Är ordinaltal mer naturliga än kardinaltal? I artikeln diskuteras dessa frågor och deras betydelse för undervisningen.

Frågan om de matematiska sanningarnas natur är inte en akademisk fråga. Den är nämligen av mycket litet intresse för forskande matematiker. Däremot kan den vara av stor didaktisk betydelse. I denna artikel driver jag tesen att ordinaltalen är både den första och den mest betydelsefulla uppfinningen i matematikens historia.

Uppfinningar och upptäckter

Att matematiken är den äldsta av alla vetenskaper och något av en vetenskapernas urmoder är åtminstone alla matematiker överens om. Däremot är det idag inte lika självklart att matematiken själv överhuvudtaget är en vetenskap. Den som bedriver vetenskap utforskar naturen och gör upptäckter. Vad gör en matematiker? Räknar och tänker. På vad? Och hur?

Han, eller med risk för att det blir fel, hän – i finskan skiljer man i tredje person singularis inte på manligt och kvinnligt – tänker på matematiska objekt såsom algebraiska strukturer, funktioner, avbildningar, transformationer eller något sådant.

Sten Kaijser är professor i matematik vid Uppsala universitet

Men vad är matematiska objekt, finns de? Och i så fall, var finns de? Är de matematiska sanningarna uppfinningar eller upptäckter? Alla dessa frågor hör hemma i det som bäst kan kallas *matematikens filosofi* där man funderar över exempelvis i vilken mening matematiska objekt existerar, och om hur vi får kunskap om dem.

Jag ska här koncentrera mig på frågan om matematiska objekt är uppfinningar eller upptäckter. Det första som då bör sägas är att detta är en fråga som för de allra flesta forskande matematiker är helt ointressant, dvs det är inte en akademisk fråga. Problemen är verkliga och om man löser ett svårt problem så får man publicera en uppsats i en matematisk tidskrift. Det räcker för en matematiker. Rent spontant skulle dessutom de flesta matematiker anse att det vi gör är upptäckter. Eftersom det vi ägnar våra liv åt måste finnas så är det enda vi gör att upptäcka hittills okända egenskaper hos dessa objekt.

A andra sidan är det få som kan förneka att våra beteckningar är uppfinningar. För de flesta av oss är det när vi första gången får höra att likhetstecknet är en uppfinning svårt att gissa när det uppfanns.

Då är det som mest bekvämt är att acceptera beteckningarna som uppfinningar medan allt annat betraktas som upptäckter. Det ger åtminstone en parallell till andra vetenskaper.

Enligt min mening är detta dock att göra det lite för lätt för sig. Jag vill påstå att många definitioner kan sägas ha karaktären av uppfinningar och att det även för en arbetande matematiker kan ge en viss frihetskänsla att ibland betrakta vissa begrepp som uppfinningar.

Ett banalt exempel på vad jag menar är att passaren naturligtvis är en uppfinning. Med hjälp av den blev det möjligt att ”matematiskt” upptäcka cirkeln. Sedan var det lätt att se att det fanns gott om cirklar i naturen.

Nå, spelar det någon roll om matematiska sanningar är upptäckter eller uppfinningar? Jag tror det. Först och främst vill jag påstå att det har en uppenbar didaktisk betydelse. Enligt min mening kan vi nämligen aldrig begära att barn ska göra uppfinningar, däremot kan vi ibland ge dem möjligheten att göra upptäckter. Det vi betraktar som uppfinningar ska vi därför lära ut, medan det som är upptäckter kan vi – om vi och barnen har tid – ge dem en chans att upptäcka själva.

Det finns exempel i modernare matematik som visar att uppfinningarna ibland är bättre än upptäckterna. Jag brukar t ex påstå att först upptäckte Newton infinitesimalkalkylen, sedan uppfann Leibniz den – idag är det Leibniz kalkyl vi använder. På samma sätt vill jag påstå att ”de imaginära talen” upptäcktes på 1500-talet i samband med lösningen av tredjegradsekvationen, men det var först sedan de uppfunnits i början av 1800-talet som de kunde förstås. Det uppfinnarna gjorde var att definiera en multiplikation av vektorer i planet som visade sig ha väldigt trevliga egenskaper.

De ”naturliga” talen

Det som denna artikel i första hand ska handla om är de ”naturliga talen”! Skulle de verkligen kunna vara något annat än en upptäckt? Ja, enligt min uppfattning så är de faktiskt det.

Grunden är att vi utan att kunna räkna kan se om det ligger två, tre eller fyra bollar i gräset. Vi har alltså en inbyggd uppfattning om antal upp till ungefär tre eller fyra. Jag har heller inte hört talas om något folk som inte har antalsord upp till fyra. Däremot är det inte alla språk som har ord för större antal.

Det de däremot har är ord av typen, flock, hjord, stim och liknande för att ange vanliga – och för dem som talar språket – viktiga samlingar av djur. De är alltså inte hjälplösa inför större antal än fyra, men de har som sagt var inga antalsord för dem.

Nu är det ju faktiskt också så att vi, som har ord för hur stora antal som helst, använder våra tal till mycket mer än att bara ange antal. Först och främst så använder vi ofta våra tal för att ange en plats i en ordning, som att vi bor i hus nummer 22.

Min tes är nu att ordningstalen var en uppfinning, som helt enkelt bestod i att man använde samma ord varje gång som ”man hade anledning att räkna”. När den uppfinningen väl hade gjorts så kunde man plötsligt, istället för att bara lyssna när någon sade att det var många, ställa frågan – hur många?

Därigenom upptäcktes det att det fanns betydligt större antal än bara fyra. Min tes är alltså att ordningstalen – ordinaltalen – var en uppfinning medan antalen – kardinaltalen – var en upptäckt.

Inom parentes sagt så fick jag ett oväntat stöd för tesen om att ordinaltalen var en uppfinning när jag berättade om den för en kollega i Uppsala, Christer Kiselman. Han berättade nämligen för mig att han i Australien träffat en man som adopterats av en aboriginstam. Denne man levde halva året med sin stam och var under andra halvan universitetslärare. Det intressanta var nu att i hans stam fanns det när han adopterades bara kardinaltalsord upp till fyra. Däremot hade man benämningar för fler barn än bara fyra så att den femte, sjätte, sjunde och upp till åtminstone nionde sonen och dottern i en barnaskara hade egna benämningar. Eftersom skillnaden mellan de manliga och de kvinnliga benämningarna inte var så stor, så kunde den nye adoptivsonen som present till sin stam ge dem kardinaltal (förmodligen godtyckligt många) som utgick ifrån deras eget språk.

Enligt min mening är alltså ordinaltalen den nödvändiga uppfinningen som gör det möjligt att upptäcka kardinaltalen.

Därmed finns det plötsligt ett bra svar på frågan om noll är ett naturligt tal – svaret är att *naturliga tal är inget naturligt begrepp*.

Vi måste skilja på ordinaltal och kardinaltal. När vi räknar så säger vi ett, två, tre, ... och då använder vi ordningstalen. Noll är alltså inget ordningstal. Svaret på en fråga som börjar ”hur många” är däremot alltid ett kardinaltal, så svaret på frågan om antalet isbjörnar i Antarktis säger därför att noll är ett kardinaltal.

Man har sagt mig att dåvarande Skolöverstyrelsen, SÖ, år 1960 bestämde att barnen i svenska skolor skulle få lära sig att noll var ett naturligt tal. Detta innebär att det bestämdes att i svenska skolor skulle kardinaltalen var de naturliga talen – dessförinnan var det ordinaltalen.

Därmed kommer jag in på det som för mig är det viktigaste budskapet i denna artikel, nämligen att det är dags att åter uppvärdera *ordningstalen*.

En möjlig förklaring till varför ”den nya matematiken” misslyckades kan rent av ha varit att matematikerna trodde att det var möjligt att förstå kardinaltalen innan man lärt sig ordningstalen.
I de äldsta räknelärorna var det första räknesättet ”räkning”, dvs uppräkning – barnen måste alltså lära sig ordinaltalen, innan de fick börja med att addera och subtrahera.

För lite mer än hundra år sedan uppfann Cantor nya ordinaltal, oändliga ordinaltal, och upptäckte att han både kunde addera och multiplicera dessa. Hans addition var i princip densamma som barnen gör när de adderar genom att först räkna det ena och sedan det andra. Det överraskande var dock att vid addition av oändliga ordinaltal beror resultatet på i vilken ordning talen kommer. Detta visar att ordinaltalsaddition i sig inte är kommutativ, och det samma gäller f ö multiplikationen. Att addition och multiplikation av ändliga ordinaltal är kommutativ beror helt enkelt på att dessa kan identifieras med motsvarande kardinaltal.

Trots detta är det min åsikt att det är ordinaltalen, de ordnade talen som ska utgöra grunden och som ska uppfattas som de naturliga talen. Det främsta skälet är att med dessa kan vi tom klara av subtraktion där vi drar ett större tal ifrån ett mindre. Allt vi behöver göra är ju att förlänga talraden åt vänster. Vi behöver aldrig undra vad mindre än ingenting är.

Min tes är alltså att vi bör låta ordningstalen få tillbaka rollen som ”de naturliga talen”. Vi ska också betrakta dessa som en uppfinning som ingen förutsätts behöva göra om. Vi ska acceptera att ordinaltalsräkning inte är naturligt kommutativ och att det är ett tecken på begåvning om barnen inte omedelbart tror på att addition och multiplikation är kommutativa. Vi ska också ta vara på att de flesta barn idag redan vet att ”minus är kallt”, dvs vi ska införa negativa tal tidigt.

Det som kardinaltalen är bra för är som ett fantastiskt hjälpmedel när man adderar, subtraherar och multiplicerar.