

7A

7F

Erathostenes såll

MATEMATIKENS UTVECKLING – PROBLEMLÖSNING – TAL

Avsikt och matematikinnehåll

Syftet med aktiviteten är att ge eleverna ett historiskt och fördjupat perspektiv på begreppen primtal, delbarhet och oändlighet. Med *Erathostenes såll* får eleverna en möjlighet att lära sig en metod för att finna alla primtal mellan 1 och 100. Euklides visade att primtalen är oändligt många och att läsa hans bevis är en introduktion till att förstå matematikens logiska resonemang. Kunskap om primtal är grunden till att utveckla färdigheter inom bl.a. talteori och algebra, liksom grunden för förståelse av begreppet delbarhet. Alla tal som inte är primtal är sammansatta tal och kan skrivas som en produkt av primtal på ett entydigt sätt.

Förkunskaper

Grundläggande aritmetik och multiplikationstabellen.

Material

Ett ark med talen 1–100 ordnade i ett system med 10 x 10 rutor och penna.

Beskrivning

Varje elev får en hundraruta med talen 1–10 på översta raden och 91–100 på nedersta raden. Eleverna ska försöka finna alla primtal mellan 1 och 100 genom att successivt stryka de tal som inte är primtal. Använd EPA-modellen (Enskilt – Par – Alla). Låt eleverna först arbeta enskilt med problemet. Låt dem efter en stund jämföra sitt resultat med en klasskamrats.

- Hur många primtal har eleverna hittat? Har de funnit lika många primtal? I en lärarledd helklassdiskussion enas klassen om hur många primtal det är på arket.
- Det har visat sig att det blir allt glesare bland primtalen ju större tal som studeras. Hur många primtal finns det egentligen? Kan det finnas oändligt många primtal? Ja, Euklides bevisade det på 300-talet f.Kr. Ta gärna upp hur han resonerade.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Introduktion

Låt eleverna inledningsvis fundera över om de vet vad som kännetecknar ett primtal. Gå tillsammans igenom definitionen: *Ett primtal är ett naturligt tal, som är större än 1 och som inte har några andra positiva delare än 1 och talet självt.*

Uppföljning

Projicera arbetsbladet med talen 1–100 på tavlan. Inled en diskussion med eleverna om hur de gått tillväga för att stryka de sammansatta talen. Visa tillsammans hur Erathostenes systematiskt kunde stryka talet 1 (som inte är ett primtal), ringa in talet 2 som ett primtal och sedan stryka alla jämna tal i kolumnen under 2 och i kolumnerna som börjar med 4, 6, 8 och 10. Är talet 3 ett primtal? Ja, ringa då



in detta och stryk sedan tal som finns diagonalt och som är delbara med 3 (titta på talens siffersumma). Talet 4 är redan struket och det är inget primtal. Nu vidare till talet 5 som är ett primtal och därmed ringas in. Talen i raden under 10 är redan strukna, eftersom de är jämna, så nu behöver endast kolumnen med talen som slutar på fem strykas. Talet 6 är redan struket (delbart med 2 och 3). Talet 7 är nästa primtal, detta ringas in och talen som är delbara med 7 är de sista på arket som behöver strykas. Talen 8, 9 och 10 är sammansatta tal och redan strukna sedan tidigare och sökandet efter primtal mellan 1 och 100 är klart!

Talet 11 är ett primtal men det räcker med att stanna vid \sqrt{N} om N är det högsta talet som ska undersökas eftersom $\sqrt{N} \cdot \sqrt{N} = N$. I vårt fall är $N = 100$ och $\sqrt{N} = 10$.

Det finns 25 primtal mellan 1 och 100: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

Bevisidé

Hur bevisade Euklides att antalet primtal är oändligt?

Antag att 17 är det största primtalet. Bilda talet $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 17 + 1 = 510511$. Antingen är 510511 ett primtal eller ett sammansatt tal. Om 510511 är ett primtal så är antagandet om att 17 är det största primtalet felaktigt. Om 510511 är ett sammansatt tal så kan det inte delas med något av primtalen upp till 17 (eftersom detta i så fall skulle ge resten 1). 510511 måste i så fall vara sammansatt av primtal som är större än 17, vilket också detta betyder att antagandet om 17 som det största primtalet är fel. Byt ut talet 17 mot ett godtyckligt primtal p i resonemanget ovan och det går alltid att finna primtal som är större!

Alternativt:

Antag att det finns ändligt många primtal p_1, p_2, \dots, p_n . Bilda med dessa talet $P = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n + 1$. Enligt aritmetikens fundamentalsats kan P skrivas som en produkt av primtal, $P = q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_m$. Nu finns det två möjligheter. Antingen är P ett primtal (och då finns det fler än n primtal) eller så är P ett sammansatt tal och har en delare som är ett primtal. Detta kan inte vara något av de givna primtalen p_1, p_2, \dots, p_n eftersom division av P med ett av dessa ger resten 1. Härav följer att det utöver de givna primtalen måste det finnas ytterligare sådana.

Variation

Finn alla primtal mellan 101 och 200. Jämför med antalet primtal mellan 1 och 100. Det tycks bli glesare mellan primtalen allt längre fram i talraden. Är det alltid så?

Följ upp med att titta på det animerade såll för talen upp till 200 som finns på [sv.wikipedia.org/wiki/Eratosthenes_såll](http://sv.wikipedia.org/wiki/Eratosthenes_s%C3%A5ll).

En betydligt mer grundläggande aktivitet för de yngsta eleverna finns i *2A Primtal*.

Utveckling

Utmana med följande problem: Produkten av två heltal (där inget av heltalen har slutsiffran noll) är 1000000. Vilka är de två heltalen? (För att lösa problemet behövs kunskap om primtalsfaktorisering. Svaret är $64 \cdot 15625$ eller $2^6 \cdot 5^6$)

Läs om aktuella upptäckter om primtal i artikeln *Två matematiska genombrott* i Forskning och Framsteg 2013:7, se fof.se/artikel/omtumlande-losningar-pa-klassiska-mattegor.

Erfarenheter

Lektionsupplägget har använts i början av kursen Matematik 1c inom ett ämnesövergripande projekt på NA-programmet vid Nösnäsgymnasiet i Stenungsund.

Erathostenes såll

Finn alla primtal upp till 100!

Använd hundrарutаn, ringа in аllа primtal och stryk аllа аndrа, sammаnsаttа, tal. Funderа på smаrtа sätt som gör аtt du kаn stryка mångа tal på еn gång. Hur mångа primtal hittar du?

Erathostenes från Kyrene levde på 200-talet före Kristus. Han var en lärd man som ägnade sig åt matematik, filosofi, geografi och språk och han var bibliotekarie på det berömda biblioteket i Alexandria i Egypten. Varför tror du denna aktivitet kallas Erathostenes såll?

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

