SIMON WIGZELL & ANNA PALBOM

Utmaningar för understimulerade

Att räkna före i boken är ett vanligt sätt att möta de elever som är speciellt intresserade och duktiga i matematik. Ofta saknas dock de utmaningar som kan behövas för att hålla intresset vid liv. Här ges förslag på ett arbetsområde som avser att fördjupa och vidga kunskaperna och också stimulera intresset hos dessa elever.

Låt oss börja med en liten berättelse om vårt möte med några elever i årskurs 4 i en skola i en förort till Stockholm för några år sedan. Vi var där för att pröva några idéer som vi hade om hur skolan ska kunna ta hand om de elever som är understimulerade i matematik. Läraren hade därför valt ut den handfull elever som hon trodde skulle vara lämpade för oss att prata med. Vår avsikt den dagen var att förklara moduloräkning för dem. Vi ville se om de kunde följa med i våra resonemang om varför man kan vilja räkna med modulo, och om hur man i praktiken gör det.

Vi började med att prata om klockan och hur man ska tänka om man till exempel vill räkna ut hur mycket klockan är 8 timmar efter klockan 9. Vi förklarade att man bara behövde addera som vanligt, men att man sen skulle ta bort 12 från resultatet eftersom 12 timmar är samma sak som ett helt varv runt urtavlan och alltså inte spelar någon roll. Trevligt nog hade de inga större problem att förstå varför och idén med att hela varv var ointressanta och att man därför kunde strunta i multipler av 12 var snart helt naturlig för dem. När de fick räkna lite på egen hand klarade de snart också av subtraktion, där de istället var tvungna att lägga till 12 för att få ett korrekt klockslag.

Efter att också ha nämnt och diskuterat veckodagar med dem, där det istället är talet 7 som är viktig, förklarade vi moduloräkning mer allmänt, det vill säga hur man räknar med modulo för godtyckliga tal. De var intresserade och hade gott om frågor. Vi pratade om att när man räknar modulo 5 kan man säga att man börjar om från 1 när man kommer till 6, 6 är ju samma sak som 1, och så vidare, och att det därför egentligen bara finns fem tal: 1, 2, 3, 4, 5.

När vi kommit så långt frågade en av eleverna hur man gör med 0: ”5 är ju egentligen 0, så hur fungerar det egentligen?”.

Flickan som frågade hade redan tidigare varit den som verkade ha klart lättast att förstå vad vi pratade om, och hennes fråga hade vi innan lektionen funderat på – skulle vi ta upp nollan eller hoppa över den för att, som vi trodde, göra det enklare? I och med hennes fråga insåg vi att de här eleverna var alltför begåvade i matematik för att vi skulle kunna hoppa över saker för att göra det enklare, och vi skulle bli tvungna att ta upp hur det egentligen förhåller sig med nollans roll i moduloräkning.

Efter två timmar var vårt möte med eleverna slut och vi hade ett samtal med läraren. Vi berättade hur imponerade vi varit över elevernas förståelse, och framförallt över flickan som ställt frågan. Då framkom någonting intressant: Läraren, som precis hade övertagit klassen, hade egentligen inte varit säker på att flickan ifråga var bra på matematik. Hon var alltid uttråkad på timmarna och verkade inte lyssna, men lärarens känsla var att flickan kanske var understimulerad och därför hade hon fått vara med i gruppen vi träffat. Den flickan, som uppenbarligen var mycket begåvad vad gäller matematik men som givetvis var uttråkad på lektionerna är exakt den sorts elev som vi vill kunna hjälpa.

Vad görs idag?

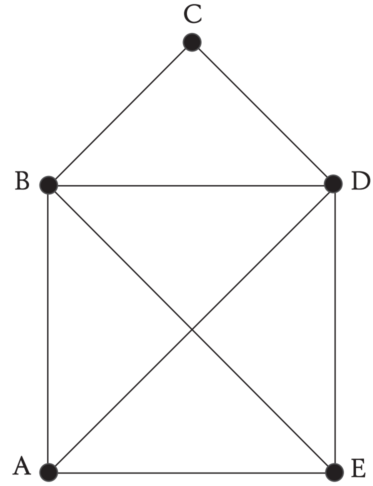
Det finns vissa standarderfarenheter som understimulerade elever i matematik brukar ha: Räkna före i boken, räkna fler och ibland svårare uppgifter på samma tema, vara hjälplärare åt andra elever, räkna knep-och-knåp-uppgifter. Vi ska inte gå in alltför detaljerat på varför vi tycker att det här är mindre lyckade strategier för eleven själv, men några av problemen är att eleven ofta inte följer med i den vanliga undervisningen eftersom han/hon redan räknat avsnittet och att eleven inte får chansen att lära sig så mycket matematik som han/hon egentligen skulle kunna tillgodogöra sig. I Lpo 94 står det att "undervisningen skall anpassas till varje elevs förutsättningar och behov", och det gäller även de speciellt begåvade eleverna. Därför föredrar vi att man istället ger eleven möjligheten att lära sig matematik som inte tas upp i i kursplanen för grundskolan. Då kan de följa med i den vanliga undervisningen när nya saker tas upp där, men också parallellt ha en annan bok att jobba med när de har tid över. Där kan man ta upp mer abstrakta problem och ge utmaningar som kräver både kreativitet och analytisk förmåga.

Lämpliga områden för bredvidmaterial

Räknekunskaperna hos mellanstadieelever är inte alltför stora så de områden man väljer att behandla bör inte kräva avancerad aritmetik. Exempel på bra områden är kryptologi (som många elever tycker är roligt), kombinatorik (som delvis tas upp i den vanliga kursplanen) och flera områden inom den diskreta matematiken. Dessa har vi behandlat i våra böcker. Här tar vi upp ett område som vi också tycker passar utmärkt, grafteori.

Grafer

För en mellanstadieelev kan grafer te sig som ett märkligt matematikområde. Till skillnad från det mesta de sett tidigare, där det ofta handlar om siffror och räkning, så handlar det nu nästan enbart om strukturer och tankar om dessa. Ytterligare ett skäl till att grafer är ett område som är värt att ta upp är att vi vill visa att matematik innehåller så mycket mer än ren aritmetik.



Figur 1. En graf består av punkter och streck mellan punkterna. Vi kommer att kalla dessa för hörn respektive kanter i fortsättningen.

En graf som den i bilden ovan kan symbolisera många olika saker:

- En karta med vägar och städer, där hörnen är städer och kanterna vägar mellan städerna
- Ett sociologiskt diagram, där hörnen är människor och kanterna symboliserar ett förhållande mellan dem
- Ett abstrakt sätt att illustrera samband mellan godtyckliga föremål.

Man kan också ha riktade grafer, det vill säga grafer där kanter som förbinder två hörn har bestämd riktning. En sådan kant kan exempelvis symbolisera en enkelriktad gata eller det faktum att person A älskar person B, men känslan inte är besvarad.

Ett bra sätt att få förståelse för vad en graf egentligen är är att ta upp Eulerstigar, det vill säga problemet om när man kan rita en graf med ett enda kontinuerligt streck.

Problem:

Försök att rita figur 1 ovan med ett enda streck. Du ska börja i ett hörn, och du får bara använda varje kant en gång.

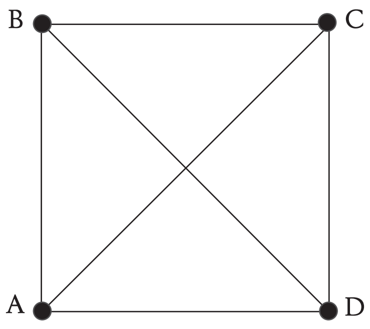
Svar: Det går bra.

Ett exempel på en lösning är

A -> E -> B -> A -> D -> B -> C -> D -> E.

Problem:

Försök göra samma sak med figur 2.



Figur 2

Svar: Det går inte.

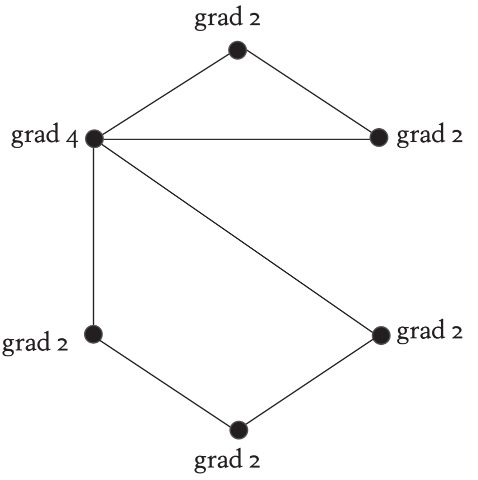
Vi ska bevisa varför det är omöjligt. För att uttrycka det formellt så har vi hittat en *Eulerstig* i figur 1, men för grafen i figur 2 finns det inga Eulerstigar. Beviset här är skrivet för Nämnarens läsare, för elever kan det passa bättre med ett mer informellt bevis med illustrerade exempel.

Det är enkelt att bevisa kriterierna för att det ska finnas respektive inte finnas en Eulerstig i en (oriktad) graf. Det räcker med att titta på graden för ett hörn, där *graden för ett hörn definieras som det antal kanter som utgår från hörnet.* Exempelvis har hörnet A grad 3 i graferna ovan.

Sats:

Om det finns 0 eller 2 hörn med udda grad i en sammanhängande graf (sammanhängande innebär att grafen inte består av flera delar) så har grafen en Eulerstig. Om det finns 4 hörn eller fler med udda grad så saknas Eulerstigar.

Notera att det inte kan finnas ett udda antal hörn med udda grad eftersom varje kant går mellan två hörn, så om man summerar graden för alla hörn så får man ett jämnt tal.



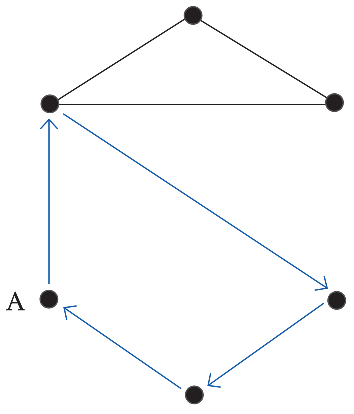
Figur 3

Bevis:

Vi vill rita grafen med ett enda streck, och vi får bara använda varje kant en gång. Det betyder att allteftersom vi ritar strecket så plockar vi bort de kanter vi använder, och när vi är klara ska inga kanter finnas kvar i grafen om det finns en Eulerstig.

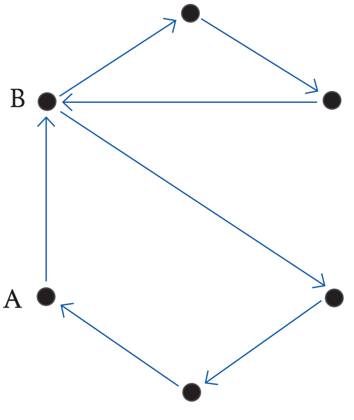
Studera nu hur graden i ett hörn ändras när vårt streck passerar förbi den. Varje gång strecket når ett hörn och sedan fortsätter ut från hörnet så kommer graden minskas med 2 (en kant används på vägen in till hörnet, en på vägen ut). Så ett hörn med jämn grad kommer fortfarande ha jämn grad efteråt, och detsamma gäller för ett hörn med udda grad. Men i det hörn man börjar skiftar graden, och på samma sätt i det hörn man slutar, eftersom *bara en kant används* i båda fallen.

Låt oss börja med fallet med en graf där alla hörn har jämn grad, se figur 3. Vi börjar rita stigen i ett hörn *X*. Det innebär att *X* nu har en udda grad, medan alla andra hörn har jämn grad. Och det innebär i sin tur att oavsett hur man drar strecket så kommer det att sluta i hörn *X*. Om du inte kan fortsätta strecket betyder det att graden för hörnet är 1 när strecket är på väg in till det. Men alla hörn utom det du började i har jämn grad, och för sådana hörn vet vi ju redan att de fortfarande har jämn grad efter varje gång strecket har passerat igenom det. Alltså måste strecket sluta i det första hörnet. Nu kan vi lyckas rita hela figuren med ett enda streck eller så ser det ut som i figur 4.



Figur 4. Alla hörn har jämn grad, och strecket börjar i A. Istället för att plocka bort använda kanter har vi med pilar markerat hur strecket går; som synes kom de tre översta kanterna inte med i strecket.

Eftersom alla hörn hade jämn grad från början så har alla hörn fortfarande jämn grad, även när man har dragit sitt streck. Det innebär att för de eventuella delgrafer som inte kom med i strecket kan vi göra samma sak igen: Vi kan börja med ett nytt streck i ett hörn som ingick i det första strecket, och det nya strecket kommer då att sluta i det hörn det började. Sen kan vi klistra ihop det strecket med det första strecket, och så vidare till hela grafen ritas med ett streck. I figur 4 börjar man alltså streck nummer två i hörn B i nedre vänstra hörnet av triangeln som inte kom med:



Figur 5.

Alltså kan man alltid hitta en Eulerstig i en graf där alla hörn har jämn grad. För att vara exakt kan man till och med hitta en Eulercykel, det vill säga ett streck som börjar och slutar i samma hörn.

På samma sätt kan man alltid hitta en Eulerstig om endast 2 hörn har udda grad. Om man börjar strecket i det ena av dessa hörn så måste det sluta i det andra, och eftersom alla andra hörn har jämn grad kan man tillämpa resonemanget om hopklistrade streck. Det är omöjligt att hitta en Eulerstig om det finns 4 eller flera hörn med udda grad. Då kan maximalt 2 stycken hörn ha ändrat grad från udda till jämnt eller tvärtom. Om du har ritat hela grafen med ett streck måste alla hörn ha gått ner till grad = 0 när du är klar.

Vi har alltså bevisat att det finns en Eulerstig i en graf om och endast om det finns exakt 0 eller 2 hörn med udda grad.

Fortsättning

Efter att ha arbetat med Eulerstigar kan man fortsätta med Hamiltonstigar, där stigen ska passera varje hörn exakt en gång, med bipartita grafer som är grafer där alla hörn har en av två färger och två förbundna hörn inte får ha samma färg. Andra problem är allmän graf-färgning, det klassiska handelsresandeproblemet där man ska hitta den kortaste vägen för en handelsresande som måste besöka alla städer precis en gång, minsta snittet, största flödet och så vidare.

LITTERATUR

Engström, A. (2005). Matematikbegåvningarnas revansch? *Nämnaren 32*(2).

Palbom, A. & Wigzell, S. (2007) *Maximatik: Talsystem och grafer.* Stockholm: Natur & Kultur.

Palbom, A. & Wigzell, S. (2007) *Maximatik: Kombinatorik och modulo.* Stockholm: Natur & Kultur.

Palbom, A. & Wigzell, S. (2007) *Maximatik: Krypto.* Stockholm: Natur & Kultur.

Passare, M. (2008). Mormors glasögon och räkning modulo nio. *Nämnaren 35*(1).

Wistedt, I. (2005). En förändrad syn på matematikbegåvningar? *Nämnaren 32*(3).