Bengt Ulin

# Problemlösning i symbios med matematikhistoria

*Samverkan mellan matematik och andra ämnen kan stimulera problemlösning. Här finns många anknytningar till naturvetenskap, konst, teknik och inte minst historia. Syftet med denna artikel är att påvisa hur problemlösning och matematikhistoria kan korsbefrukta varandra och ingå i en levande symbios.*

Var finner vi äventyren i matematiken? Utan tvivel är det frågeställningarna som inbjuder oss till äventyr. Det är de som ger oss utmaningar. I vår strävan att klara av dem kan det bli riktigt spännande. Redan i början av en problemlösning kan adrenalinet rinna till när man tror att man funnit en fruktbar uppslagsände. Ska den leda framåt eller in i en återvändgränd? Och när man slitit ett bra tag och slutligen kommit fram till en lösning kan pulsen öka en hel del medan man undersöker om lösningen verkligen håller för logikens skarpa prövning. Problemlösning i växelverkan med begreppsbildning och ökad kunskap bildar kärnan i all matematisk aktivitet, inte minst i skolmatematiken.

*Bengt Ulin har varit lektor vid Lärarhögskolan i Stockholm och Kristofferskolan i Bromma*

Till skillnad mot matematikerna måste lärarna hålla sig innanför en ansträngande tidsram. Det händer tyvärr att viktiga moment rentav måste uteslutas på grund av tidsbrist. Sådant känns oangenämt, i synnerhet med tanke på övningsaspekten av ämnet. Problemlösning bör få bedrivas i lugn och ro.

## Breddning av skolmatematiken

En viktig faktor för att stimulera eleverna till utmaningar och träning är att integrera matematiken med andra verksamhetsfält. Vilka fält rör det sig då främst om? Naturvetenskap och teknik, enligt många. Kant ansåg att det finns så mycket hållbar kunskap i naturvetenskaperna som det finns matematik i dem – en rätt extrem bedömning, får man väl säga, eftersom naturvetenskapen så starkt bygger på iakttagelse.

Men även konst, hantverk och historia har många och djupgående anknytningspunkter till matematik. Ju mer denna kan vävas samman med närliggande ämnen, desto djupare blir elevernas helhetssyn och desto starkare deras motivation. Det är därför viktigt att i viss mån realisera skolmatematiken som ett orienteringsämne. Hur ska nu detta gå till, när utrymmet inte tycks räcka till för matematiken som övningsämne, för övning i problemlösning?

## Symbios mellan problemlösning och historia

I en tänkvärd artikel i Nämnaren nr 3, 2001 ger Tomas Wennström en berättigad varning för att matematikhistorien enbart ges i notisform. Han ger intressanta exempel på hur matematik varit integrerad med olika sektorer av samhället. Min erfarenhet är att man kan förbättra tidsekonomin i undervisningen genom att sammanfläta problemlösning med matematikhistoria. Dessutom förstärker en sådan integration elevernas motivation en hel del. Problem som tagits ur olika kulturer och som är förenliga med kursen bidrar till en korsbefruktning mellan problemlösning och idéhistoria. Dessa två fält kan leva i symbios med varandra. I fortsättningen ska vi se på några representativa exempel.

*Exempel 1*

Som Papyrus Rhind och Papyrus Moskva visar var de fornegyptiska läromästarna skarpsinniga när det gällde å ena sidan uppdelning av bråk i en summa av stambråk (bråktal med täljare 1), å andra sidan lösning av geometriska problem. Ibland behandlade de proportionalitet på ett speciellt sätt, nämligen i den Hau-räkning som spelade en viktig roll (Hau betydde hop, mängd). Här följer uppgift nr 26 ur Papyrus Rhind:

> En mängd och dess fjärdedel ger tillsammans 15. Hur stor är mängden?

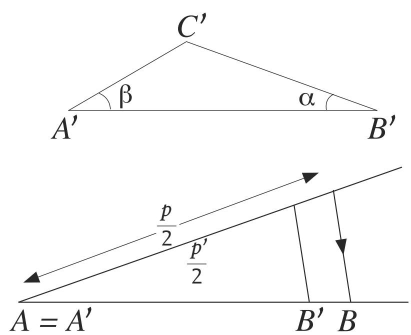
Som lösning anvisar skrivaren: ”Räkna med 4, ta därav en fjärdedel, dvs 1. Summan blir 5. Talet 5 går upp 3 gånger i 15. Alltså blir svaret 12.”

Det stämmer, eftersom fjärdedelen av 12 är 3 och 12 + 3 = 15. Låt oss nu ta ett språng över till ett geometriproblem i god euklidisk stil:

*Exempel 2*

> Av en triangel *ABC* känner man vinklarna *A* och *B* samt triangelns omkrets *p*. Konstruera triangeln (med passare och linjal).

Låt oss först konstatera att även vinkeln *C* är känd, eftersom triangelns vinkelsumma är 180°. Vi känner alltså alla tre vinklarna och det finns en oändlig skara likformiga trianglar med de givna vinklarna. I denna skara har en viss triangel en omkrets lika med den givna sträckan *p*. Det finns alltså en entydig lösning. Man kan här passa på att diskutera med eleverna varför en sådan lösning måste finnas och anknyta till kontinuitetsprincipen. Nu kan fornegyptiernas Hau-metod komma väl till pass, dvs att först finna proportionerna och sedan justera till rätt storlek: vi väljer en triangelsida $A'B'$ och avsätter vinklarna $\alpha$ och $\beta$ vid ändpunkterna $A'$ resp $B'$. Därmed erhåller vi en triangel $A'B'C'$, vars vinklar är de givna. Den erhållna triangeln måste sedan justeras så att dess omkrets $p'$ blir lika stor som sträckan $p$. Detta genomförs med den parallellkonstruktion som fig 1 visar för det fall att omkretsen måste förstoras, dvs då $p' < p$. I figuren har vi av utrymmesskäl valt att jämföra halva omkretsarna.



En märklig, konstlad problemtyp rörande förstoring och förminskning finner man i de babylonska urkunderna:

*Exempel 3*

Jag fann en sten [men vägde den inte]; sedan jag ökat dess vikt med en sjundedel och därefter ökat [den nya vikten] med en elftedel vägde jag stenen: den vägde då 1 ma-na. Vad vägde stenen från början?

Vi skulle inte vilja utsätta våra elever för en sådan orealistisk uppgift, men tydligen gav man stenar av detta slag som träning i Babylonien. I ett historiskt perspektiv kan vi med gott samvete ställa eleverna inför ett och annat problem av artificiellt slag, t ex för att visa att konstlad ”skolmatematik” har en lång historia. Lösningen av det babylonska exemplet visar för övrigt eleverna fördelen med att utnyttja förändringsfaktorer; i det aktuella fallet kan de ställa upp och lösa ekvationen

$$\frac{8}{7} \cdot \frac{12}{11} x = 1$$

där $x$ är den sökta vikten uttryckt i viktenheten ma-na. Dessutom kan eleverna få kontrollera det babylonska svaret,

$$\frac{2}{3} \text{ ma-na, 8 gin, } 22\frac{1}{2} \text{ se,}$$

varvid 1 ma-na = 60 gin och 1 gin = 180 se.

I anslutning till exempel 3 – eller efter någon annan inledning – kan man ta upp det babylonska talsystemet, vars bas var 60. Samma bas kom senare att användas av grekerna. Den är fortfarande aktuell i våra tidsenheter timme och minut som ju utgör 60 minuter respektive 60 sekunder. Den utnyttjas på likartat sätt vid vinkelmätning, även om teodoliternas vinkelskalor numera oftast baseras på decimalsystemet.

Man kan gärna ge uppgifter på andra talsystem, t ex mayakulturens system där basen var 20. Av stort värde är att låta elever i 15-årsåldern skapa ett eget talsystem, gärna med 5 som bas, och låta dem på egen hand utveckla tekniken för olika algoritmer. Givetvis ska det binära systemet tas med, eftersom det har bäring på datatekniken.

Låt oss nu se på en geometriuppgift från den hellenska epoken:

*Exempel 4*

*AB* är en given sträcka. Finns det en delningspunkt *X* på sträckan, så att den kortare delen förhåller sig till den större delen, som denna förhåller sig till hela sträckan? I så fall, var befinner sig punkten *X*?

Om $X$ befinner sig nära $B$, så ligger förhållandet $u = |XB|/|AX|$ nära 0, medan förhållandet $v = |AX|/|AB|$ är nära 1. Om däremot $AX$ upptar något mer än halva sträckan $AB$, så är $u$ nära ett, medan $v$ är endast något större än en halv. I det förra fallet gäller alltså $u < v$, i det senare fallet däremot $u > v$. Av kontinuitetsprincipen följer att likheten $u = v$ måste uppnås när $X$ rör sig mot mitten från ett läge nära B. Alltså finns en lösning.

Med $|AX| = x$ och $|AB| = 1$ får vi ekvationen

$$\frac{1-x}{x} = \frac{x}{1}$$


Detta leder till andragradsekvationen

$$x^2 + x = 1$$

och ger eleverna ett meningsfullt tillfälle att använda kunskap i algebra.

Den positiva roten är

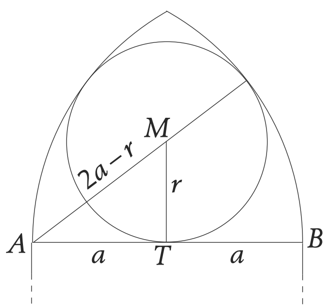
$$(\sqrt{5} - 1)/2 \approx 0{,}618$$

Talet ger det gyllene snittet av sträckan *AB*, ett delningsförhållande som ansågs särskilt vackert och utnyttjades i stor skala i de gotiska katedralernas arkitektur. Det finns en omfattande litteratur om gyllene snittet och de Fibonacci-tal som är nära förknippade med talet. Här går matematikhistorien hand i hand även med biologin.

I geometrin dyker gyllene snittet på ett skönt sätt upp i den regelbundna femhörningen. Dess diagonaler formar ett regelbundet pentagram, den ”logo” som pythagoréerna använde för hälsa, och varje diagonal skärs av de angränsande diagonalerna i gyllene snittets proportion. Att undersöka den reguljära femhörningens egenskaper innebär att på ett instruktivt sätt förena geometri med algebra. En sådan möjlighet ger även fönstren i de gotiska katedralerna, som följande problem ger ett exempel på.

*Exempel 5*

Figuren visar schematiskt den övre delen av ett gotiskt katedralfönster.
Cirkeln är inskriven i utrymmet mellan en bas AB och två symmetriskt ställda spetsbågar med centra i A och B och vars radie är lika med basens längd, 2a. Hur stor är cirkelradien?




Det gäller här att få ett grepp om läget för cirkelns medelpunkt, $M$. Poängen är att $M$ ligger på linjen från $A$ (eller $B$) till cirkelns tangeringspunkt med motstående båge. Om nu $T$ får vara cirkelns beröringspunkt med basen $AB$ och radien sätts lika med $r$, så får man enligt Pythagoras sats

$$(2a - r)^2 = r^2 + a^2$$

med den vackra lösningen $r = \frac{3a}{4}$.

Fördelaktigt nog för skolmatematiken har några av de riktigt stora matematikerna, t ex Euler och Newton, formulerat intressanta uppgifter av elementärt slag. Från Newton härrör följande uppgift som även den erbjuder en instruktiv kombination av geometri och algebra. Jag nöjer mig här med att endast formulera problemet:

En rätvinklig triangel har area A och omkrets 2p.
Hur lång är hypotenusan, uttryckt i A och p?

## Kontinuitet och konvergens

Med den berömda paradoxen om Akilles och sköldpaddan ställde filosofen Zenon från Elea (ca 490–430, ej att förväxla med Zenon från Kition, stoicismens grundläggare) djupgående frågor om rörelse, kontinuitet och konvergens. Zenon påstod att den snabbfotade Akilles ej helt kan hämta in det försprång som den långsamma sköldpaddan hade fått vid kapplöpningens början. Zenon förde följande logiska resonemang. De båda tävlande startar samtidigt men sköldpaddan har ett visst försprång. När Akilles har nått sköldpaddans startpunkt, har sköldpaddan rört sig något till en ny punkt. När Akilles når denna punkt har sköldpaddan rört sig till en ny punkt, osv. Mer än Zenons övriga paradoxer har Akilles-paradoxen engagerat tänkare ända in i vår tid. I matematiken kom problemen kring det infinitesimala, det oändliga och kontinuiteten att inta en central plats.

Under lång tid ”har de skarpaste intellekten i varje generation, det ena efter det andra, angripit dessa problem, men åstadkommit ingenting, grovt talat. ... Weierstrass, Dedekind och Cantor ... har fullständigt löst dem ... Frågan om det infinitesimala löstes av Weierstrass, lösningen på de två andra problemen påbörjades av Dedekind och fullföljdes definitivt av Cantor.”

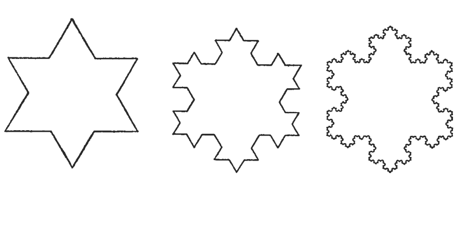
Så skrev den kände Cambridge-filosofen och logikern Russell år 1901.

Ett resultat, som publicerades 1875 och bidrog till att göra Weierstrass världsberömd, var konstruktionen av en kontinuerlig funktion som saknar derivata i varje punkt. Funktionskurvan är gränskurva till en följd av funktionskurvor som bockats till och komprimerats in i det infinitesimala. Vid samma tid gjorde Cantor banbrytande upptäckter rörande oändliga mängder. Bl a visade han att mängden reella tal (säg mellan 0 och 1) till skillnad mot mängden av rationella tal inte är numrerbar. Så förhåller det sig trots att det finns oändligt många rationella tal mellan två hur närliggande tal som helst.

Nog borde eleverna få uppleva något av kontinuets fascination! Den problemlösning som kan bedrivas på detta område kan erbjuda spännande fördjupningsuppgifter åt dem som har visat stort intresse för matematik. (Det är f ö viktigt att även mer begåvade elever kan få ta sina krafter i anspråk.)

År 1904 konstruerade svensken H von Koch den sedermera berömda snöflingekurvan. Den har anknytningspunkter till såväl Cantors mängdlära som Weierstrass gränskurva. Utgångsformen är en sträcka, säg $p$. Den delas i tre lika långa delar. Cantor tog bort tredjedelen i mitten. Genom detta förfarande skapade han ”Cantor- mängden” som gränsresultat av en oändlig upprepning. Koch bildar istället en likbent bock över den tomma mittdelen och får därigenom fyra delsträckor med längden $p/3$, se figuren. För att få en sluten form låter vi tre lika långa sträckor bilda en liksidig triangel med omkrets $3p$ som utgångsfigur.

I andra stadiet bildas då en polygon i form av en sexuddig stjärna I figuren nedan ser vi de två närmast följande stadierna för de kurvor som konvergerar mot snöflingekurvan.

*Exempel 6*

Snöflingekurvan ryms inom ett begränsat område. Är även dess längd begränsad?

Svaret är nej, vilket beror på att längden vid varje iterationssteg multipliceras med faktorn 4/3.

Om $L$ är längden hos polygonen med nummer $n$ i följden ($n$ = 1, 2, 3, . . .) har vi

$$L_n = 3p\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$$

vilket visar att $L$ växer obegränsat då $n$ går mot oändligheten.

Hausdorff introducerade ett dimensionsbegrepp som kan appliceras på Kochs kurva och andra s k fraktaler:

Om antalet repliker vid övergång från ett stadium till nästföljande stadium är $a$ och skalfaktorn $s$,

så är kurvans dimension $d = \dfrac{\log a}{\log s}$

I vårt fall är $s = \dfrac{p}{p/3} = 3$, och

för Kochs kurva gäller uppenbarligen $a = 4$, en linje ersätts av fyra nya, vilket ger kurvan Hausdorff-dimensionen

$$d = \frac{\log a}{\log s} \approx 1{,}262$$

Vi ser att värdet ligger mellan 1 och 2. För en sträcka, en kvadrat och en kub ger formeln $d = 1$, $d = 2$ resp. $d = 3$ i överensstämmelse med vårt gängse dimensionsbegrepp. Om t ex sidolängden i en kub förstoras $N$ gånger kommer antalet ursprungliga kuber som behövs för att fylla den nya kuben att bli $N^3$. Formeln ger då:

$$\mathrm{d} = \frac{\log N^3}{\log N} = \frac{3\log N}{\log N} = 3$$

”Fraktal” betecknar bruten mängd; i stadierna till Kochs kurva uppträder alltfler brytpunkter. Studiet av fraktaler tog fart sedan Mandelbrot 1977 publicerat en bok om fraktaler och naturformer. Det har visat sig att man utgående från en rektangel kan imitera exempelvis gestalten hos en ormbunkskvist förvånande väl med hjälp av en geometrisk iteration efter ett 50-tal steg.

## Kaos

I slutet av 70-talet expanderade även området dynamiska system starkt, sedan Feigenbaum (1978, i början mest på lek) genomfört iterationer

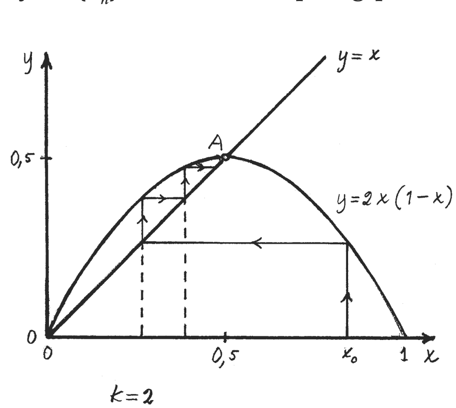
av typ $x_{n+1} = f(x_n)$

varvid han som funktion f(x) bl a valde $kx(1-x)$, där $0 \le x \le 1$ och $k$ är en konstant $\ge 1$. Funktionskurvan är en parabelbåge från origo till punkten (1;0) med maximipunkt $(0{,}5; k/4)$. Grafiskt kan iterationen genomföras på så sätt att ett ingångsvärde $x$ ger ett funktionsvärde $y$ som ”speglas” i linjen $y = x$, vilket ger ett nytt $x$-värde som i sin tur ger ett nytt funktionsvärde, osv. För $k = 1$ tangerar kurvan linjen $y = x$ i origo. För större $k$-värden har bågen och denna linje förutom origo en punkt $A(p;p)$ gemensam,

där $p = 1 - \frac{1}{k}$.

Det bör vara en trevlig skoluppgift att undersöka om iterationen leder till konvergens hos talföljden $\{x_n\}$. Man finner att den konvergerar mot 0 för $k = 1$. Origo sägs då vara en attraktor till funktionen. För $k$-värden i intervallet $1 < k \le 3$ finner man att attraktoregenskapen övergår till punkten $A$, den punkt i vilken linjen $y = x$ skär parabelbågen.

Feigenbaum fann också att iterationen ger divergens när k just överskridit värdet 3: funktionen får då två attraktorer, dvs följden $\{x_n\}$ erhåller två hopningspunkter.




Denna fördubbling av antalet attraktorer kallas bifurkation. Det märkliga är att nya bifurkationer inträffar då k passerar en följd av $k$-värden, $\{k_n\}$ ($k_0 = 3$), som växer mot ett gränsvärde $q \approx 3{,}57$.

Därutöver fann Feigenbaum att differenskvoten

$$\frac{k_n - k_{n-1}}{k_{n+1} - k_n}$$

går mot ett gränsvärde $d$, då $n$ växer obegränsat, och att detta gäller även för andra funktioner än den vi tagit upp här! Talet $d$ kallas Feigenbaums konstant. Studiet av vad som händer då konstanten $k$ i vårt exempel överskrider värdet $q \approx 3{,}57$ leder direkt in i den ännu rätt moderna kaosteorin. En liten ändring av utgångsvärdet $x_0$ kan medföra stora förändringar i de värden som iterationen ger. Här finns material för specialarbeten på gymnasienivå.

### REFERENSER


Aaboe, A. (1989). *Antikens matematik från babylonierna till Ptolemaios*. Prisma.

Gleick,J. (1997). *Chaos*. Minerva.

Häggmark, P. (1976). Fibonaccital. *Nämnaren 3(2)*, 11-25.

Midonick, H. (1968). *The Treasury of Mathematics, vol 1-2*. Penguin Books.

Newman, J. R. (1977). Rhindpapyrusen, *SIGMA, band 1*. Forum.

Spektrum der Wissenschaft (1989). *Chaos und Fraktale*, Spektrum der Wissenschaft Verlagsgesellschaft. Heidelberg.

Stewart, I. (1999). *Life's Other Secret*. Penguin Books.

Thomas, J. (1977). Den grekiska matematiken, *SIGMA, band 1*. Forum.

van der Waerden, B. L. (1954). *Science Awakening*. Noordhoff, 1954.

Wallin, H. (1986). Kaotiska mängder. *Elementa nr 4/1986*.

Wennström, T. (2001). Matematikhistoria i skolan, eller... . *Nämnaren 28(3)*, 40-43.