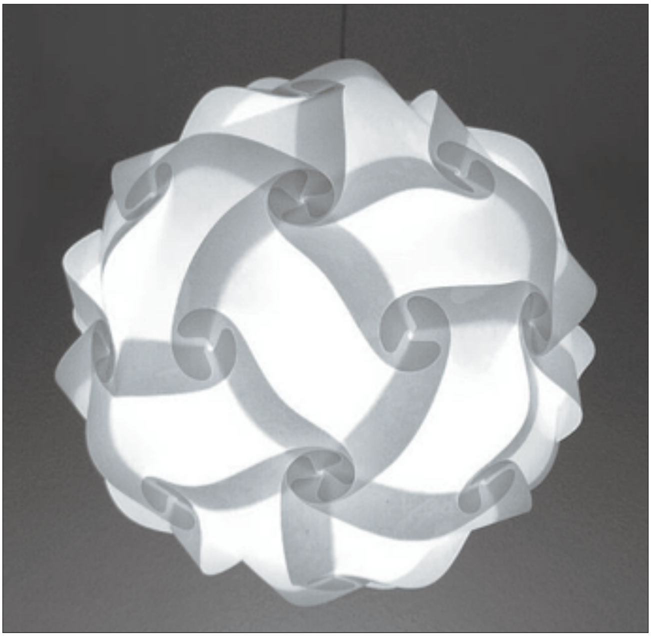
Danska lampor

Om det fanns något slags inofficiellt världsmästerskap i att designa så många olika lampor som möjligt av vit böjlig plast så måste väl Danmark för länge sen ha bärgat mästerskapstiteln. Med detta som utgångspunkt gav min hustru och jag oss själva uppgiften att hitta en riktigt vacker lampa vid ett av våra årliga besök i Danmark. Mycket riktigt fick vi en del att välja mellan. Men vi fastnade för denna.

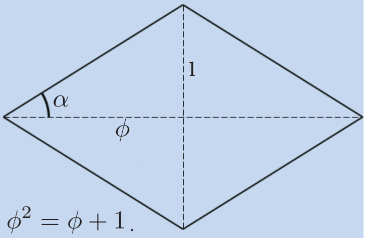


Lampan på bilden heter IQlight® och blev 1973 formgiven av Holger Strøm. IQ står här inte för intelligenskvot som man kanske i förstone skulle tro, utan för *Interlocking Quadrilaterals*. Både min hustru och jag blev genast tilltalade av designen och var inställda på att slå till på stående fot, men det var det matematiska innehållet som åtminstone för mig gjorde att det inte fanns någon möjlighet i världen att backa från ett köp.

Designen baseras på en *rombisk triakontaeder* (hädanefter kallat RT i denna text), det vill säga en regelbunden 30-sidig polyeder där varje yta utgörs av en gyllene romb. Vad är det då? Jo, i en gyllene romb är förhållandet mellan de långa och korta diagonalerna lika med det gyllene snittet. RT har vidare 60 kanter och 32 hörn (20 tresidiga hörn och 12 femsidiga hörn).

Om man vill tillverka en RT måste man först konstruera en gyllene romb. Detta kan till en början tyckas väldigt komplicerat med gyllene snittet och allt vad det för med sig. Men sanningen är den att det är riktigt enkelt. Det handlar bara om att få till en enda vinkel så faller resten på plats. Så vi reder ut den:

Visa att om $\tan\alpha = \dfrac{1}{\phi}$ så är $\tan 2\alpha = 2$.

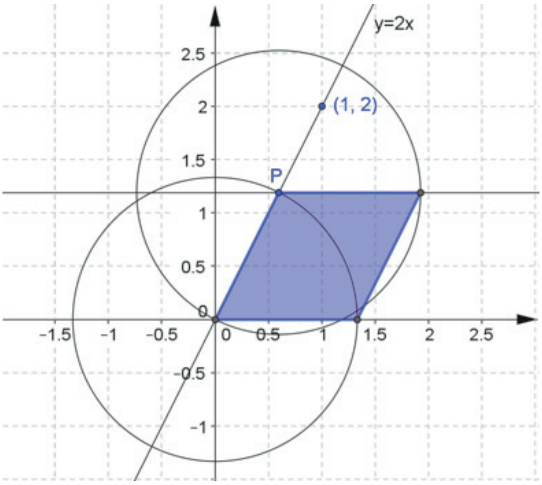


För beviset behöver vi sambanden

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha},\quad \frac{1}{\phi} = \phi - 1 \quad \text{och} \quad \phi^2 = \phi + 1.$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\cdot\frac{1}{\phi}}{1-\left(\frac{1}{\phi}\right)^2} = \frac{2\cdot(\phi-1)}{1-(\phi-1)^2} = \frac{2\cdot(\phi-1)}{1-\phi^2+2\phi-1} =$$

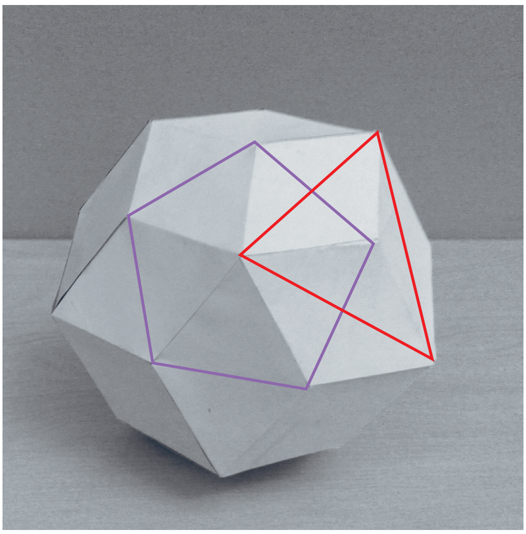
$$\frac{2\cdot(\phi-1)}{-\phi^2+2\phi} = \frac{2\cdot(\phi-1)}{2\phi-\phi^2} = \frac{2\cdot(\phi-1)}{2\phi-(\phi+1)} = \frac{2\cdot(\phi-1)}{\phi-1} = 2\,.$$



Med detta fastslaget går man vidare med passare och linjal som antyds i nedanstående konstruktion i GeoGebra. Rita linjen $y = 2x$. Markera en punkt P på linjen. Sätt passarspetsen i origo och rita en cirkel genom P. Sätt passarspetsen i P och rita en cirkel genom origo. Rita en linje genom P och parallell med x-axeln.

Skriv ut och mångfaldiga sedan denna blåa romb i 30 exemplar. Kom ihåg att spara en limflik på två angränsande sidor. Klipp och klistra så kan resultatet bli som nedan.

Den rombiska triakontaedern och de platonska kropparna



Den rombiska triakontaedern är en så kallad *catalansk kropp*. Som hos de platonska kropparna är samtliga sidoytor identiska. Men skillnaden är att ytorna inte är regelbundna polygoner i vanlig bemärkelse, inte heller är samtliga hörn identiska. Det finns en intressant koppling mellan RT och de platonska kropparna. Se fotot. Den lila pentagonen (korta diagonalen i den gyllene romben) och den röda triangeln (långa diagonalen) antyder släktskap med dodekaedern och ikosaedern. Men också tetraedern och kuben kan skrivas in med hörn i triakontaederns hörn. Oktaedern kan dock inte skrivas in på detta sätt. Det kan man inse om man betraktar oktaedern som två hopfogade pyramider. Då kan vi tala om en ”nord- och sydpol” samt en ”ekvator” med fyra hörn. Om man i RT väljer två motstående femsidiga hörn som sådana poler så ser man att inga hörn hamnar på någon ekvator. På samma sätt om man utgår från två tresidiga hörn som poler. Alternativt kan man se att i inget av de båda fallen kan det bli fråga om den fyrfaldiga symmetri som skulle krävas till de fyra hörnen på oktaederns ekvator.

Liksom de platonska kropparna har de catalanska kropparna *dualer* som kan bildas genom att man markerar centrum på varje sidoyta och låter dessa vara hörn i en ny kropp. Dualen till en catalansk kropp kallas arkimedisk kropp och har samtliga kanter och hörn identiska. Sidoytorna är däremot av mer än en typ. RT:s dual kallas *ikosidodekaeder* och består av 20 trianglar och 12 pentagoner. I ikosidodekaedern däremot kan oktaedern inskrivas med hörn i hörn.

”Vad vacker den är” tänker jag varje gång jag tänder lampan i trappan där hemma. Men jag kan dessutom komma att tänka på en del annat.

Den intresserade kan söka sig vidare med ledorden *rhombic triacontahedron, icosidodecahedron, Catalan solid, Archimedean solid, tetrahedron 10-compound, cube 5-compound.*