

Symmetrier i islamiske mønstre

Att se på kunst med matematiske øgon ger enligt författaren nya möjligheter att tränga in i konsten. Konst ger också andra möjligheter att tränga in i matematiken. I denna artikel behandlas symmetrier utifrån islamsk konst.

Kunst og arkitektur kan en lett finne eksempler som kan kobles til ulike matematiske begreper, særlig begreper fra geometri. Det er vel kjent at kunstnere opp gjennom tidene bevisst [medvetet] har brukt begreper som naturlig kan sies å høre hjemme i matematikken, eksempelvis forholdstallet *Det gylne snitt*, som støtte når elementene i et bilde skulle settes sammen (Jacobsen, 1965). På den annen side er det også rimelig å tro at det i mange tilfeller er slik at de matematiske sammenhengene ikke har vært styrende for kunstnerens utforming, men at bevisstheten [medvetendet] om dem trer fram når man i ettertid betrakter kunstverket med et matematisk blikk. Man kan si at man da matematiserer kunsten, og det er naturligvis bare én av mange mulige måter å nærme seg et kunstverk på. Min påstand er at en slik matematisering har verdi fordi den bringer inn et språk, det matematiske, som man kan snakke om kunsten i, og ved hjelp av dette språket kan man trenge inn i detaljer ved kunstverket som man kanskje ellers ikke ville ha blitt oppmerksom på. I en skolesammenheng mener jeg at en slik innfallsvinkel vil være verdifull både for matematikkfaget [matematikämnet] og for faget *kunst og håndverk* (som tilsvarende *bild* og *slöjd* i Sverige). Eksempler på dette er vist i *En katedral för lärande i geometri* (Rønning, 2003). I Norge er slike koblinger også understreket gjennom det faktum at læreplanen fremholder det å *regne* [räkna] som en grunnleggende ferdighet som skal komme inn i alle skolefag. De ulike fagene har da tolket det å regne nokså ulikt ut fra fagenes egenart, og i faget kunst og håndverk omfatter det å regne mye mer enn tallbehandling (Rønning, 2009).

Symmetri i læreplaner

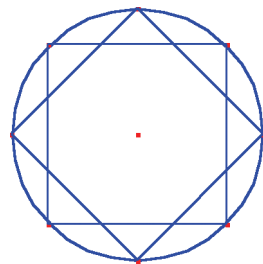
Jeg vil her arbeide med begrepet *symmetri* og spesielt studere symmetrier i mønstre fra islamsk kultur. Symmetri, og begreper knyttet til dette [spegling, rotation, parallellforskytning] er sterkt vektlagt i den norske læreplanen der det for eksempel allerede etter fjerde skoleår står at elevene skal kunne gjenkjenne og bruke speilsymmetri og parallellforskyvning i konkrete situasjoner (Utdanningsdirektoratet, 2006). I den svenske kursplanen för matematik (Skolverket, 2000) ser jeg ikke at begrepet symmetri er eksplisitt brukt, men det står som mål etter femte skoleår at elevene skal "ha en grundläggande rumsuppfattning och kunna känna igen och beskriva några viktiga egenskaper hos geometriska figurer och mönster". Slike "viktiga egenskaper" vil naturligvis kunne være symmetriegenskaper. I Lgr 11 er imidlertid symmetribegrepet

sterkere betont. Her står det for eksempel under årskurs 1–3 for geometri: "Symmetri, till exempel i bilder och i naturen, och hur symmetri kan konstrueras." For årskurs 4–6: "Symmetri i vardagen, i konsten och i naturen samt hur symmetri kan konstrueras." For årskurs 7–9: "Avbildning och konstruktion av geometriska objekt. Likformighet och symmetri i planet" (Skolverket, 2010).

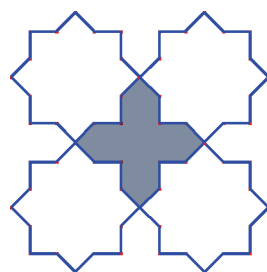
Islamske dekorasjoner

Islamske byggverk er ofte svært [mycket, oerhört] rikt dekorert med mønstre som dekker store flater. I disse mønstrene finner man ofte inskripsjoner fra Koranen, men også geometriske figurer spiller en viktig rolle. Man oppdager fort at det er enkelte grunnleggende figurer som går igjen ofte, med ulike variasjoner. En figur som er svært ofte forekommende er laget på grunnlag av to kvadrater innskrevet i en sirkel, der det ene kvadratet er dreid [vriden] 45 grader i forhold til det andre (figur 1). Denne figuren kalles *Khatem Sulemani*, som betyr *Salomons segl*. Ved å sette fire slike figurer sammen, som vist i figur 2, dannes det et korsformet område mellom dem, og elementet i figur 2 kan brukes som byggestein for et flatedekkende mønster [en tessellering].

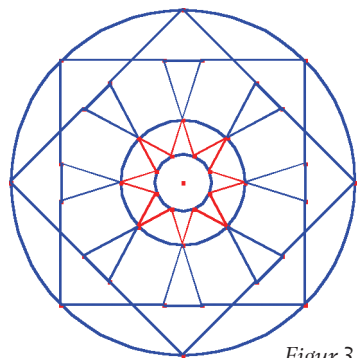
Figur 1 viser den grunnleggende *Khatem Sulemani*, men den blir mer spennende dersom den utvikles litt, og her er det verdt å merke seg at denne utviklingen skjer ved å innføre flere konsentriske sirkler i den grunnleggende figuren. I figur 3 er det lagt inn to mindre, konsentriske sirkler, og mellom disse to er det laget en åttetakket stjerne. Ved å fjerne hjelpelinjer og legge på farger kan man her få et mønster som vist i figur 4.



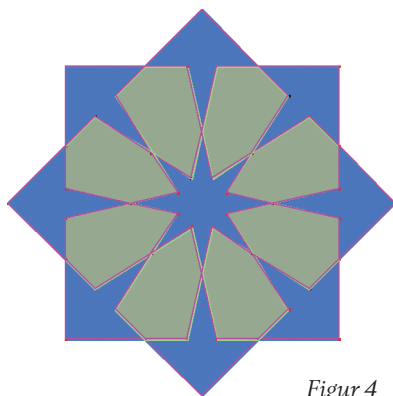
Figur 1



Figur 2

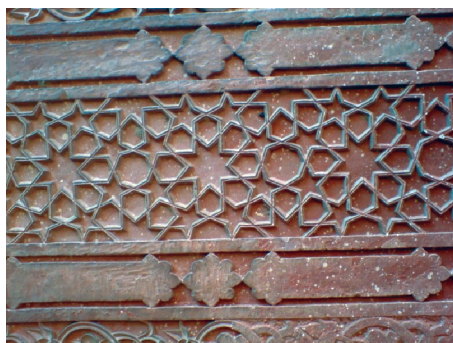


Figur 3



Figur 4

Denna artikel finns även på Nämnaren på nätet. Med gratisprogrammet Cabri II Plus 1.4 Plugin, www.cabri.com, kan du undersöka och arbeta vidare med figurerna 4 och 7.

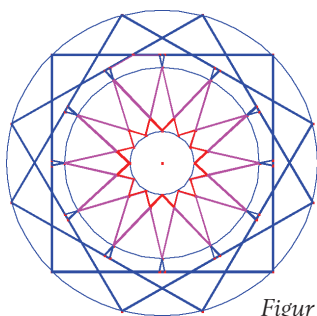


Figur 5

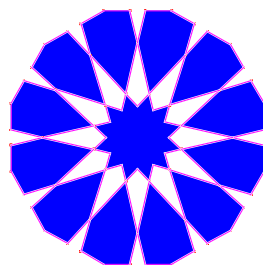
I figur 5 er vist et bilde fra det indiske monumentet Taj Mahal der man kan se mønsteret i figur 5 som en del av et frisemønster.

Gjennom å variere forholdet mellom radiene på den innerste og den nest innerste sirkelen vil mønsteret i figur 4 endre seg. En mye brukt versjon av mønsteret i figur 4 er når forholdet mellom de to radiene er slik at to og to sider i de åtte sekskantene er parallelle. Det kan se ut til at figuren på bildet fra Taj Mahal er slik.

Ved å rotere det opprinnelige kvadratet i figur 1 30 grader i stedet for 45, dannes en 12-takket stjerne som kan behandles på tilsvarende måte som i figurene ovenfor. Se figur 6 og 7. Ytterligere detaljer om disse konstruksjonene kan finnes i (Abas & Salman, 1995). Det er også mulig å finne 10-takkete stjerner av denne typen.



Figur 6



Figur 7

Bruken av sirkler i disse konstruksjonene fortjener en liten kommentar. Det er godt dokumentert at astronomi på et tidlig tidspunkt var høyt utviklet i den arabiske (islamske) kulturen. Abas og Salman hevder at det første astronomiske observatoriet ble bygget i Maraghah i Iran på 1200-tallet, og der gjorde man både observasjoner og beregninger. Det er lett å forestille seg behovet for å kunne orientere seg i forhold til himmellegemene [himlakropparna] med tanke på navigering i denne kulturen. For det ene er det for en muslim viktig å alltid kunne peke ut retningen til Mekka, og for det andre kan man tenke seg at det å kunne navigere også hadde et praktisk formål siden det her dreier seg om [handler om] folk som beveget seg over lange avstander både på havet og på landjorda, særlig i ørkenstrøk [økenstråk] der det er lite av naturformasjoner å orientere seg etter. I forbindelse med navigering spiller konstruksjoner med bruk av sirkler en viktig rolle, så det er naturlig at man her var spesielt opptatt av, og dermed utviklet god kunnskap om, geometri knyttet til sirkler.

Symmetri i uendelige mønstre

Når barn første gang møter begrepet *symmetri* er det helst i forbindelse med aktiviteter der man speiler et mønster om en akse [axel, mittlinje]. Velkjente begynneraktiviteter her er for eksempel at man har et rutemønster der noen ruter på den ene siden av aksens er farget og så skal man farge ruter på den andre siden slik at bildet blir symmetrisk om aksens. Eller man lager et bilde

med vannfarger og bretter arket mens fargene ennå er våte slik at man får et symmetrisk bilde på den andre siden av bretten, og slik kan man for eksempel lage et bilde av en sommerfugl [fjäril]. Senere vil symmetribegrepet utvides til også å omfatte både rotasjon og translasjon (parallelforskyvning). I en studie av tredjeklasseelever har jeg vist at de har en klar oppfatning av hva både speilings- og rotasjonssymmetri innebærer, men de to fenomenene lever som helt adskilte begreper uten sammenheng med hverandre. Ordet *symmetri* er for disse elevene sterkt knyttet til bruk av speil, mens for rotasjonssymmetri har de andre ord (Rønning, 2008).

17 tapetmønstre

Et flatedekkende mønster som dannes ved å repetere en grunnfigur betraktes som et uendelig mønster. Her skiller en mellom mønstre som oppstår når grunnfiguren repeteres langs én retning [riktning] og når den repeteres langs to (ikke-parallele) retninger. De mønstrene som oppstår på denne måten [sättet],

Isometrier och grupper

[För svenska ord och illustrationer, se exempelvis artikeln *Symmetri – skön matematik för många sinnen*]

I matematikk er symmetri knyttet til det som gjerne kalles *isometrier* eller *kongruensavbildninger*, altså forflytninger av figurer som er slik at figuren bevarer både størrelse og form. Begrepet isometrier omfatter altså både speiling (refleksjon), rotasjon og translasjon. I tillegg opererer man med en fjerde isometri, kalt glidespeiling. Den kan oppfattes som en translasjon etterfulgt av en refleksjon. Det er egenskapen "å bevare størrelse og form" som er det matematiske grunnlaget for å organisere disse fire begrepene under samme overordnede begrep, altså *isometri*. Eksemplet med barns begrepsoppfatning knyttet til speiling og rotasjon viser at barn organiserer sin kunnskap etter andre systemer enn det matematikere gjør.

Refleksjonene viser seg å spille en spesiell rolle i den forstand at de kan oppfattes som byggesteiner for alle isometrier. Det er et velkjent resultat at enhver isometri enten er en refleksjon eller så kan den beskrives som en sammensetning av to eller tre refleksjoner. Mer presist er det slik at en sammensetning av to refleksjoner gir en rotasjon, eller en translasjon dersom refleksjonsaksene er parallelle. En sammensetning av tre refleksjoner kan beskrives som én refleksjon dersom refleksjonsaksene har et felles skjæringspunkt. Hvis dette ikke er tilfelle, kan denne sammensetningen beskrives som en glidespeiling. Denne egenskapen gir spesielt at en sammensetning av to isometrier gir en ny isometri, noe som uttrykkes som at mengden av isometrier er *lukket* under sammensetning. Sammen med andre egenskaper, som jeg ikke vil gå nærmere inn på, gjør dette at mengden av isometrier har en struktur som i matematikken kalles en *gruppe*. For nærmere detaljer om egenskaper ved isometrier, og bevis for de resultatene som er nevnt ovenfor, se for eksempel (Jess, Skott, Hansen & Schou, 2008).

kalles ofte for *frisemønstre*, henholdsvis [respektive] *tapetmønstre*. Det er tapetmønstrene som blir studert nærmere i denne artikkelen. Tapetmønstrene klassifiseres etter hvilke kombinasjoner av isometrier de inneholder, og det er et velkjent, men kanskje noe overraskende resultat, at det finnes nøyaktig [exakt] 17 ulike kombinasjoner av isometrier som kan opptre i et tapetmønster. Interessen for å klassifisere disse mønstrene kom først i stor grad fra fagområdet krystallografi, og Coxeter (1969) skriver at den russiske krystallografen Federov var den første som publiserte tabellen over de 17 tapetmønstrene, i et tidsskrift for mineralogi i 1891. Det var også flere matematikere som på om lag samme tid var interessert i spørsmålet å kunne karakterisere tapetmønstrene.

Et viktig element i avgrensningen av antallet tapetmønstre er knyttet til det faktum at det er svært begrenset hvilke rotasjoner som er mulige i et slikt mønster. Det viser seg at bare rotasjoner på 60, 90, 120 og 180 grader kan opptre, og videre at 90-graders rotasjon ikke kan opptre i samme mønster som en 60 eller 120 graders rotasjon. Dette kalles *den krystallografiske restriksjon*. For et bevis av denne, og av hele klassifiseringsresultatet, viser jeg til *Transformation geometry. An introduction to symmetry* (Martin, 1982). I denne forbindelse er det verdt å merke seg forskjellen fra symmetrier i *endelige* figurer. Her vil man jo kunne realisere rotasjonssymmetri på $360/n$ grader for et hvilket som helst naturlig tall n ved å lage en regulær n -kant. Den repeterende grunnfiguren i de 17 tapetmønstrene har generelt form som et parallelogram, men i noen av mønstrene står de to retningene vinkelrett på hverandre slik at grunnfiguren blir et rektangel eller et kvadrat. En tabell som viser prototyper på hvert av de 17 mønstrene finnes for eksempel i boka av Martin (1982), men kan også finnes på en rekke vevadresser, for eksempel <http://www.clowder.net/hop/17walppr/17walppr.html>

Tapetmønstre i islamske dekorasjoner

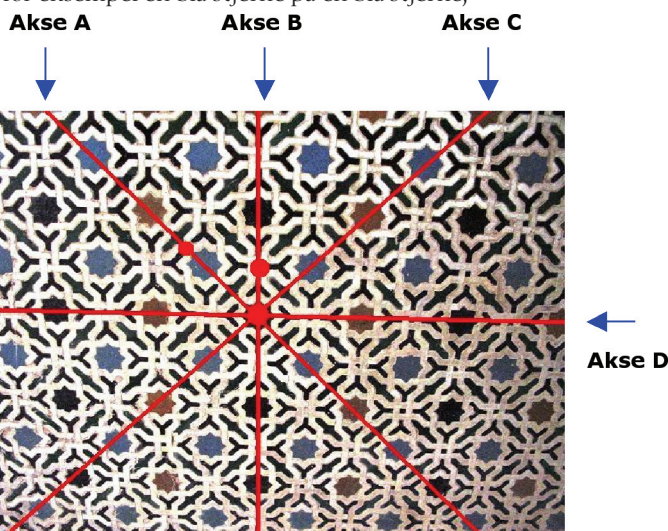
Som nevnt er byggverk knyttet til islamsk kultur ofte svært rikt dekorert med flatedekkende mønstre. Jeg har tidligere nevnt Taj Mahal i India, og i Vest-Europa er palasset Alhambra ved Granada i Spania, og også den store moskeen i Córdoba, gode eksempler på byggverk med rike dekorasjoner. Det er derfor ikke så unaturlig at man i møte med den overflod av dekorasjoner som disse bygningene inneholder, vil stille seg spørsmålet om man her kan finne alle de 17 mulighetene.

Det kan synes som om flere personer på ulike tidspunkt, mer eller mindre i en bisetning og uten videre dokumentasjon, har skrevet at svaret på dette spørsmålet er "ja". For eksempel skriver Martin at "[a]lthough it would not have occurred to the Moors to classify a design by its symmetry group, all of the seventeen groups were implicitly known to the Moors in the decorations of the Alhambra" (Martin, 1982). Herman Weyl, i den klassiske boken *Symmetry* skriver: "Examples for all 17 groups of symmetry are found among the decorative patterns of antiquity, in particular among the Egyptian ornaments" (Weyl, 1989). Ingen av disse forfatterne gir eksempler på at alle 17 faktisk finnes, og de gir heller ingen referanser som antyder hvilken basis de har for å komme med disse påstandene. Den første som synes å ha undersøkt mønstrene i Alhambra med tanke på å gjøre en systematisk klassifikasjon av dem, er Edit Müller. I sin doktoravhandling fra 1944 med tittelen *Gruppentheoretische und Strukturanalytische Untersuchungen der Maurischen Ornamente aus*

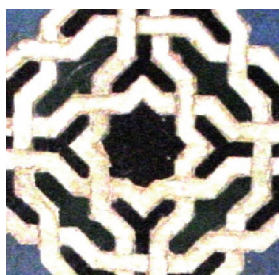
der *Alhambra in Granada* dokumenterer hun eksistensen av 11 (noen kilder sier 12) av de 17 tapetmønstrene i Alhambra (Grünbaum, 2006; Grünbaum, Grünbaum, & Shephard, 1986). Grünbaum m fl (1986) hevder å ha identifisert 13 ulike mønstre, og de hevder samtidig at de fire resterende mønstrene *ikke finnes*. Dette er naturligvis en vanskelig dokumenterbar påstand, og de tar da også visse forbehold når de skriver: "The four groups which have not been found in the Alhambra do not appear to be represented in other Moorish artifacts either (though naturally, a really systematic examination of the enormous volume of extant materials may turn up some or all of them)" (Grünbaum m fl). Ut fra dette skal det altså være fire av de 17 mønstrene som ikke finnes i Alhambra, men Pérez-Gómez (1987) skriver i sin artikkel at "[t]his paper announces the discovery of them in The Alhambra". Så er alle virkelig der allikevel?

Grünbaum (2006) kommer tilbake til dette spørsmålet og reiser i denne artikkelen en rekke problemstillinger som gjør at det ikke er så enkelt som man kanskje først skulle tro å avgjøre hvilket av de 17 mulige mønstrene en gitt dekorasjon skal klassifiseres under. En annen sak er at det spiller en viss rolle hvordan man stiller spørsmålet som man ønsker svar på. En måte å spørre på kan være "hvilke av de 17 mønstrene finnes i islamske dekorasjoner"? Da må man først avgjøre hva som skal regnes som en islamsk dekorasjon. En annen måte å spørre på kan være "hvilke av de 17 mønstrene finnes i Alhambra"? Det kan synes mer presist, og det burde være mulig å avgjøre, men det er nødvendig å ha klare kriterier for hva man skal se på. Jeg vil vise dette gjennom noen eksempler. Ett viktig kriterium vil være hvordan man tar hensyn til bruk av farger. Dekorasjonene i Alhambra er ofte fargerike, og det vil være helt nødvendig å avgjøre om, og i tilfelle på hvilken måte, man skal ta hensyn til fargene når man avgjør symmetriegenskapene.

Mønstret i figur 8 kan brukes som eksempel på fargenes rolle. Dette mønstret består av rekker [rader] med stjerner (Khatem Sulemani) der annenhver [varannan] horisontal rekke består bare av blå stjerner. I de mellomliggende rekkene er annenhver stjerne sort [svart] og rødbrun. Mellom stjernene er det ulike dekorasjoner i sort og hvitt. Ser man etter isometrier som tar hensyn til fargene, d v s som avbilder for eksempel en blå stjerne på en blå stjerne, så ser det ut til å være to typer refleksjonsakser som står vinkelrett på hverandre, merket Akse B og Akse D på figuren. Akse A og Akse C vil her ikke være refleksjonsakser fordi de vil avbilde en sort stjerne på en rødbrun. Om man derimot ser bort fra fargene og bare ser på selve mønstret, så vil også disse bli refleksjonsakser. På figuren er merket to punkter, A og B. Disse er sentre for rotasjoner i mønstret. Dersom man tar hensyn til fargene, er de begge sentre for 180 graders rotasjoner, men dersom man ser bort fra fargene, blir de begge sentre



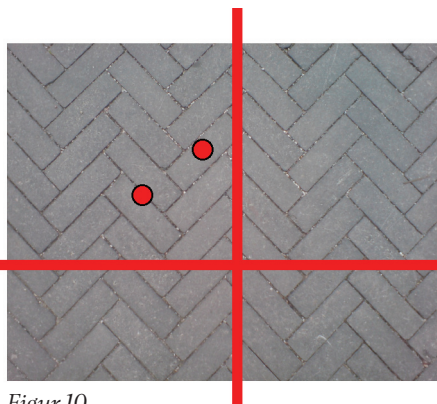
Figur 8



Figur 9

for en 90 graders rotasjon. Uten hensyn til farger kommer også punktet C fram som et rotasjonssenter, for en 180 graders rotasjon.

Det er imidlertid mer med dette mønsteret, som muligens ikke er synlig på bildet, men dersom man går nærmere inn på området rundt en av stjernene, vil en kunne se at mønsteret har en tredimensjonal effekt i det at de hvite stripene ser ut til å være flettet i et over/under-mønster. I figur 9 er det mulig å se dette. Denne effekten gjør at mønsteret faktisk ikke vil ha noen speilinger i det hele tatt. Hvis man tar hensyn til denne fletteeffekten, så vil mønsteret i figur 8, som er fra Alhambra, representere ett av de mønstrene som Grünbaum mfl (1986) hevder *ikke* finnes. Og det er nettopp et mønster med en tilsvarende effekt som Pérez-Gómez (1987) bruker som eksempel på at denne kategorien faktisk finnes.



Figur 10

I figur 10 er det vist et eksempel på et mønster som tilhører én av de fire kategoriene som Grünbaum mfl (1986) hevder ikke finnes i Alhambra, men som Pérez-Gómez (1987) viser. Her er det ingen problemer med kategoriseringen. Mønsteret har to ulike 180 graders rotasjonssentre og to glidespeilingsakser (markert med rødt i figuren). Det har altså ingen speilinger. Dilemmaet her er imidlertid at dette er et svært vanlig mønster som finnes overalt. Det bildet jeg viser i figur 10 har jeg tatt på en gangvei i Malmö, men det kunne ha vært tatt hvor som helst. Så spørsmålet er da, om det tilfeldigvis finnes på et guly i Alhambra, skal det kunne regnes med? Det vil vel i alle fall være vanskelig å argumentere for at dette er et typisk islamsk mønster.

Betydning for matematikk i skolen

Den diskusjonen jeg har lagt opp til i denne artikkelen er klart matematisk, men allikevel av en annen karakter enn det man vanligvis forbinder med matematikk i skolen. Når jeg løfter dette fram er det fordi at jeg tror det kan være verdifullt å få fram også denne siden ved matematikkfaget. Dette er med på å koble matematikk til sentrale elementer i kunst og kultur. Selve dekorasjonene her er jo flerfaglige i seg selv, også uten tanke på matematikken. De er ikke kunst for kunstens egen skyld, men de er sterkt knyttet til en bestemt religiøs kultur. Samtidig kan de lett knyttes til kunstneriske uttrykk utenfor en religiøs kontekst. Kunstneriske uttrykk med utgangspunkt i flatedekkende mønstre er godt kjent, for eksempel gjennom den hollandske kunstneren M. C. Escher. Og her er det direkte forbindelser til den islamske kulturen. Escher tilbrakte en god del tid i Alhambra (Abas, 2003) der han tegnet av mønstre som senere ble inspirasjon for hans egne verker. I boka *The Magic of M. C. Escher* (M. C. Escher Foundation, 2000) finnes utdrag fra Eschers skissebok der han har tegnet av mønstre og skrevet ved siden av "Alhambra (Majolica) 24-5-36".

Jeg mener altså at dette er en del av matematikkfaget som er verdifull fordi det viser en annen side av matematikken enn den vanlige. Dette kan være viktig for mange elever, men det kan også være viktig for mange lærere, og ikke minst for lærere som først og fremst arbeider med andre fag enn matematikk.

LITTERATUR

- Abas, S. J. (2003). Islamic patterns: The spark in Escher's genius. I D. Schattschneider & M. Emmer (red), *M. C. Escher's legacy. A centennial celebration* (s 100–112). Berlin: Springer.
- Abas, S. J. & Salman, A. S. (1995). *Symmetries of Islamic geometrical patterns*. Singapore: World Scientific Publishing Co.
- Coxeter, H. S. M. (1969). *Introduction to geometry* (2 utg). New York: John Wiley & Sons.
- David, H. (u.å.). 17 wallpaper groups. Tillgänglig 20100602 www.clowder.net/hop/17walppr/17walppr.html
- Grünbaum, B. (2006). What symmetry groups are present in the Alhambra? *Notices of the American Mathematical Society*, 53(6), 670–673.
- Grünbaum, B., Grünbaum, Z. & Shephard, G. C. (1986). Symmetry in moorish and other ornaments. *Computer and Mathematics with Applications*, 12(3–4), 641–653.
- Jacobsen, G. (1965). *Noget om konstruktiv form i billedkunst*. København: Gyldendal.
- Jess, K., Skott, J., Hansen, H. C. & Schou, J. (2008). *Matematik for lærerstuderende. Epsilon. 1.–6. klasse*. Frederiksberg: Forlaget Samfundslitteratur.
- Martin, G. E. (1982). *Transformation geometry. An introduction to symmetry*. New York: Springer.
- M. C. Escher Foundation. (2000). *The magic of M. C. Escher*. London: Thames & Hudson.
- Pérez-Gómez, R. (1987). The four regular mosaics missing in the Alhambra. *Computer and Mathematics with Applications*, 14(2), 133–137.
- Rønning, F. (2003). En katedral för lärande i geometri. *Nämnamnaren*, 30(4), 3–8.
- Rønning, F. (2008). Barns språk för å uttrykke ulike former for symmetri. I T. M. Guldal, G. Løkken, N. Naastad & F. Rønning (red), *FoU i praksis 2007. Rapport fra konferanse om praksisrettet FoU i lærerutdanning* (s 321–331). Trondheim: Tapir Akademisk Forlag.
- Rønning, F. (2009). Å regne i kunst og håndverk. I J. Fauskanger, R. Mosvold, & E. Reikerås (red), *Å regne i alle fag* (s 186–189). Oslo: Universitetsforlaget.
- Skolverket (2000). *Kursplan för matematik*. Tillgänglig 20100602 på www.skolverket.se/sb/d/2386/a/16138/func/kursplan/id/3873/titleld/MA1010%20-%20Matematik
- Skolverket (2010). *Läroplan för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet, Lgr II*. Tillgänglig på www.skolverket.se/sb/d/165/a/1841
- Weyl, H. (1989). *Symmetry* (originalen publicerade 1952). Princeton University Press.