

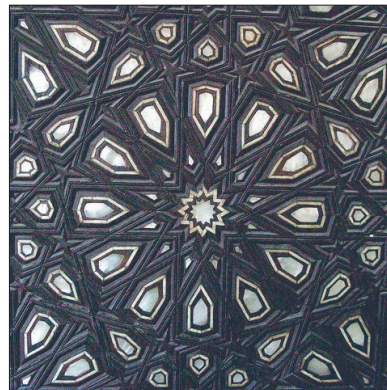
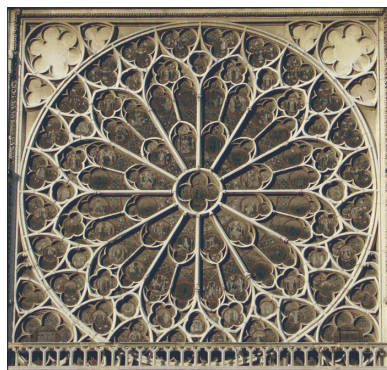
Rosettfönster

– från ornamentik till matematik

Noggrannhet och samstämmighet mellan matematiska begrepp och metoder samt skönheten hos geometriska figurer gör att man kan anse att matematik formellt ligger nära konst. Filosofiskt anser en del att matematik kan utgöra exempel på den absoluta sanningen, medan andra påstår att den är ett uttryck för det himmelska och gudomliga. Faktum är att de flesta religioner använder sig av regelbundna geometriska figurer som uttryck för det gudomliga och som utsmyckning på religiösa byggnader.

Utveckling av byggtekniken under medeltiden förbättrade bärigheten på kolonner och väggar i byggnader, något som gjorde det möjligt att bygga höga kyrkor och katedraler och därmed att ha större fönster och dörrar. Detta tillsammans med den gotiska perioden i arkitektur och konst, samt nya religiösa idéer som ansåg att ljuset var en symbol för det himmelska, stimulerade användningen av färgat glas i kyrkor och katedraler. Genom de religiösa motiven på dessa fönster kunde man visa bibliska episoder och religiösa budskap för människor som i huvudsak var analfabeter.

De religiöst etiska principer som reformationen införde ledde till att lyx och rikedom avlägsnades från religiösa byggnader, något som gjorde att användningen av påkostade färgade fönster i kyrkorna upphörde. I slutet av 1800-talet fick användningen av färgat glas i byggnader ett uppsving. Detta skedde samtidigt med och influerat av det nygotiska i arkitektur och prerafaelismen i konst och som återtog medeltidsidéer i konst och arkitektur. Till det pånyttfödda intresset för färgat glas bidrog den tekniska och industriella utvecklingen. Serieproduktion av konstnärliga föremål, samt förbättrad tillverkningsteknik av färgat glas med bättre egenskaper och för sammanfogning av mindre delar av glas till en större helhet, stimulerade produktionen av konstnärligt utformade glasfönster och glasdörrar. Städerna växte och man började använda färgade fönster även i bostäder, kontor och offentliga byggnader.



Uppifrån: rosettfönster från Notre-Dame i Paris, från den egyptiska moskén Bayt al-Amasyali och från Stockholms synagoga.



Rosettfönster ritat
av Henri Matisse.
Union Church of
Pocantico Hills.

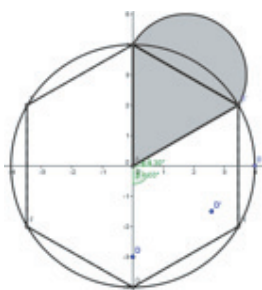
De krig som under 1900-talet härjade i Europa förstörde en stor del av de gamla fönsterglasen i kyrkor och katedraler. För att ersätta dem ombads moderna konstnärer att hjälpa till. Detta gjorde att fönster med abstrakta motiv började bli allt vanligare i religiösa byggnader från mitten av 1900-talet. De motiv och budskap som dekorerade kyrkofönster förmedlade blev mer abstrakta och lämnade en större del av tolkningen till den personliga uppfattningen.

Denna inledning om rosetter och färgade glasfönster får tjäna som bakgrund till några beskrivningar av hur innehållet kan användas i matematikundervisning i skilda sammanhang och på olika komplexitetsnivåer. Några exempel ges på de följande sidorna. På Nämnaren på nätet finns tillhörande lektionsuppgifter och förslag på lösningar.

Geometriska algoritmer för att rita rosetter

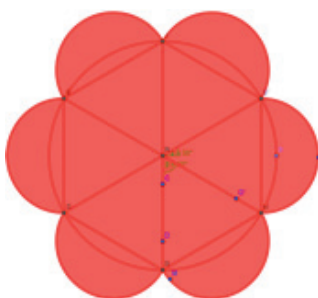
Jag kommer nu att beskriva två geometriska algoritmer för att rita rosetter. Grundidén i båda algoritmerna är att utgå från enkla regelbundna geometriska figurer för att sedan successivt utveckla rosetten. De beskrivningar som visas utvecklades med hjälp av GeoGebra. Den första algoritmen ritade rosetter med cirkelsektorformade blad.

1. Utgå från en cirkel med centrum i origo. Dra en vinkel på 60° och bestäm en punkt på cirkeln.
2. Genom denna punkt och spetsen där cirkeln träffar y-axeln dras en sida till en regelbunden hexagon. Hela hexagonen ritas.



3. Genom kommandot *halvcirkel* och två punkter på den stora cirkeln ritas en halv cirkel. Resultatet visas i övre bilden till höger.
4. På samma sätt dras halvcirklar med diametern längs alla sidor på hexagonen.
5. Dölj hjälpkonstruktionerna och färglägg figuren. Resultatet syns i nedre bilden till höger.

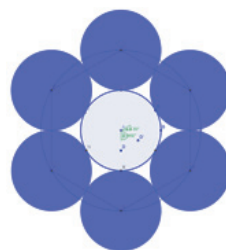
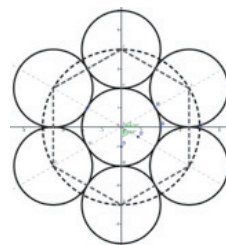
Med den andra algoritmen ritas en rosett som består av en cirkel i mitten och sex cirkelformade blad.



1. Utgå från en cirkel med centrum i origo och bestäm en punkt på cirkeln genom att dra en vinkel på 60° .
2. Genom denna punkt och spetsen där cirkeln träffar y-axeln ritas en regelbunden hexagon.
3. Rita från en spets en cirkel som tangerar x-axeln med kommandot *cirkel med centrum och punkt på cirkel*. Upprepa förfarandet och dra linjer från övriga spetsar så att de tangerar varandra.

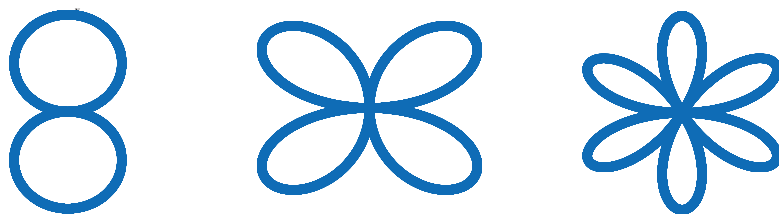
4. Utgå från origo och dra en cirkel som tangerar övriga. Man kan ana att denna cirkel är lika stor som de omgivande cirkelarna.
5. Dölj hjälpkonstruktionerna och färglägg figuren. Resultatet visas i bilden till vänster.

Från ritningen som den andra algoritmen genererar vet man att alla cirklar som bildar blad är lika. Det går att visa att den centrala cirkeln också är lika med övriga cirklar och att alla de små cirkelarna tangerar varandra i kontaktpunkterna.



Funktionsalgoritmer i polära koordinater för att rita rosetter

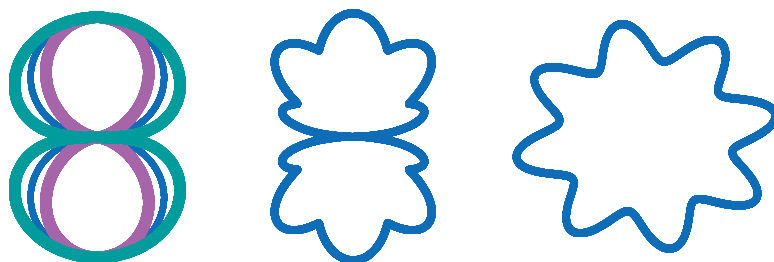
En punkt P i det polära koordinatsystemet anges med avståndet r till origo och vinkeln θ , dvs $P(r, \theta)$. Det polära koordinatsystemet är speciellt lämpligt att anlita för att åskådliggöra vissa funktioner som cirkeln och den räta linjen. I figuren nedan visas grafer till sinusfunktioner med olika naturliga tal k som koefficient i vinkeln. De kan ritas med programmet GRAPH.



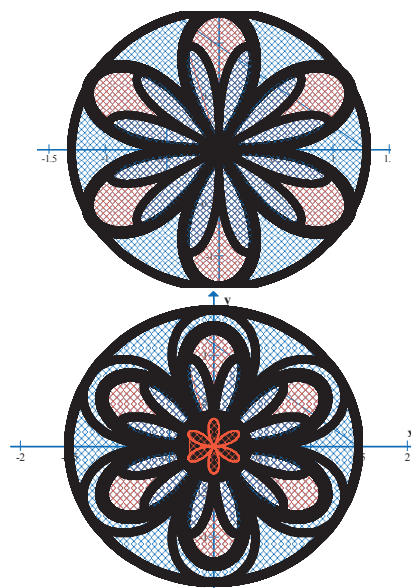
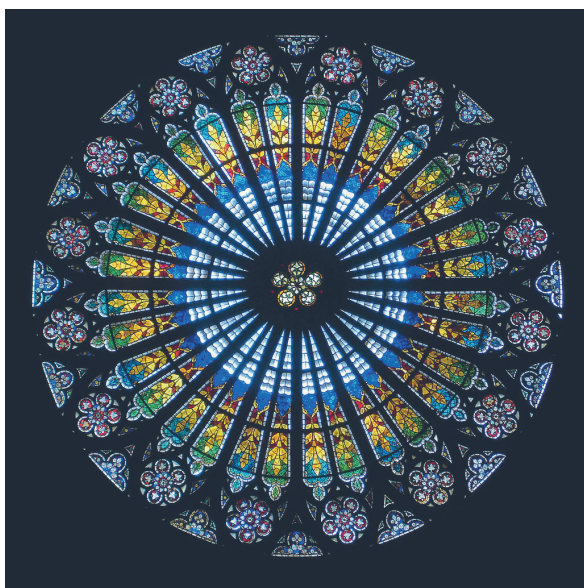
Grafer till $r = \sin(k\theta)$ i fallen (från vänster) $k = 1, 2, 3$

Sinus- och cosinusfunktioner i polära koordinatsystem kan användas för att efterlikna bladformade rosetter. Det går att ändra på bladens relativa dimensioner genom att upphöja sinus och cosinus till lämpliga exponenter. Med potenser av sinus/cosinus-funktioner får man rosetter med smalare (exponenter större än 1) eller bredare (exponenter mindre än 1) blad.

Med hjälp av funktioner som är summan av två eller fler sinus/cosinus-funktioner kan man härma lite mer komplicerade geometrier. Genom att exempelvis addera till en sinus/cosinus-funktion till en term med sinus eller cosinus av liten amplitud kan man omforma bladens kanter.



Till vänster: grafer till $r = \sin\theta$ (blått); $r = \sin 2\theta$ (rosa); $r = \sin 0,5\theta$ (grönt).
Mitten och höger: grafer till $r = \sin(\theta) + 0,3\sin(5\theta)$ och $r = 1 + 0,2\sin(8\theta)$.

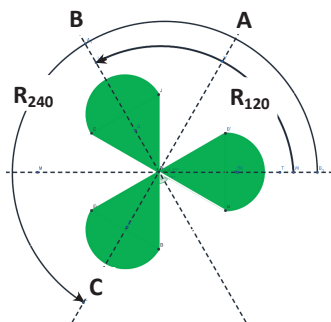


Rosettfönster från katedralen i Strasbourg med två inledningar till försök att efterlikna rosetter med $r = 1.3\text{abs}(\sin(3\theta))^{0.5}$, $r = (\text{abs}(\sin(6\theta)))^{0.5}$ och $r = 1.3\theta$.

Rosetter och symmetrier

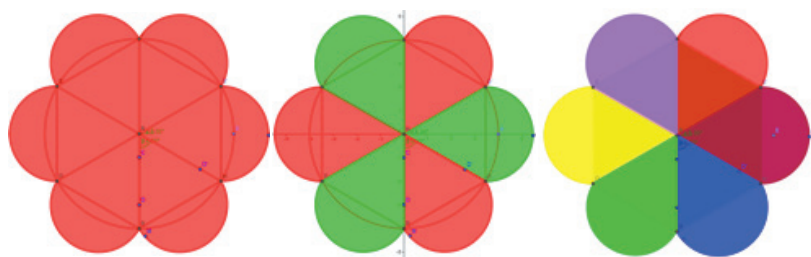
En av de egenskaper som gör de regelbundna geometriska figurerna vackra är deras symmetrier. I detta sammanhang är rosetter speciellt vackra – de har hög symmetri. Betraktar man rosetten med tre blad som visas i figuren ser man att den är symmetrisk i rotationer på 120° , 240° och 360° . Eftersom denna rotation återställer figuren till det normala läget kallar vi den för *identitet* och betecknar den I . Rotationens inversa transformationer, dvs rotation åt motsatt håll, är -120° och -240° . Den är också symmetrisk i spegelreflexioner kring axlarna A, B och C, som i figuren. Samlar vi dessa symmetrioperationer blir det sammanlagt åtta stycken. De symmetrioperationer som denna mängd består av har följande egenskaper:

1. Transformationen *identitet* I finns med.
2. Transformerar man figuren genom två successiva symmetrioperationer spelar det ingen roll i vilken ordning man transformerar. Resultatet är oberoende av operationernas ordning.
3. Transformerar man figuren genom två successiva symmetrioperationer ser man att det blir lika med en tredje symmetrioperation i mängden. Roterar man figuren 120° och sen igen 120° blir det detsamma som att rotera en gång med en vinkel på 240° .
4. Varje symmetrioperation har en invers. Exempelvis är 120° och -120° inverser till varandra. Applicerar man successivt dessa två operationer resulterar det i *identiteten* I .



De mängder som uppfyller dessa egenskaper kallas för *grupper*. I fallet av figuren ovan ser man att den har samma symmetrier som en liksidig triangel, så man kallar respektive symmetrigrupp för *den liksidiga triangelns symmetrigrupp*.

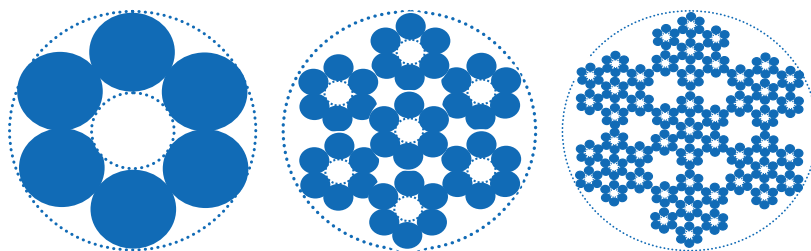
Mer komplicerade rosetter har högre symmetrier. Rosetten nedan till vänster har alla symmetrier som rosetten i figuren ovan, men den har också fler symmetrier. Den är även symmetrisk under rotationer på 60° , 180° , etc samt i reflektioner kring ytterligare tre axlar. Den helröda rosetten har samma symmetrier som en regelbunden hexagon. På så sätt ser man att den liksidiga triangelns symmetrigrupp är en subgrupp till den regelbundna hexagonens symmetrigrupp. Färgar man blad hos symmetriska rosetter minskar man de symmetrier som den geometriska formen bestämmer. Om man färgar bladen med två olika färger, mitten nedan, blir resultatet att rosetten har samma symmetrier som den liksidiga triangelns symmetrigrupp. Färgar man varje blad i olika färger förlorar rosetten alla symmetrier och det återstår bara identiteten. Så att färga rosetters blad inför en ny aspekt i analysen av symmetrier.

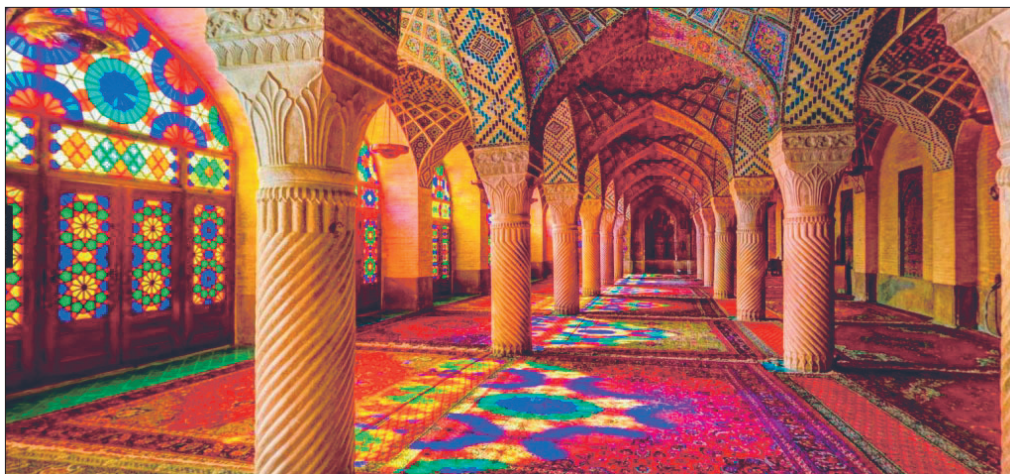


Färgar man varannat blad hos en hexagonformad rosett minskar dess symmetri från hexagonalsymmetri till den liksidiga triangelns symmetri (mitten). Färgar man bladen med olika färger, förlorar rosetten alla symmetrier och bara identitet återstår.

En fraktalrosett

En annan symmetrityp är figurer som är likformiga med sig själva när man betraktar dem i mindre skala, så kallade fraktaler. Betraktar man huvudstrukturen hos rosetten på fasaden i Stockholms synagoga ser man att den yttre konstruktionen med sex cirklar upprepar sig inåt, i allt mindre skala. Det ger en ledtråd till en geometrisk algoritm för att utveckla en fraktalfigur. I samma figur visas sedan de två första stegen vid utvecklingen av en sådan fraktal.





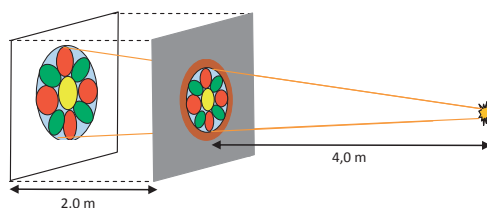
Interiör från Nasir al-Molk

Ljus genom färgade glas – tema för projektiv geometri

De färgade glasen ger upphov till vackra figurer och mönster när ljuset som passerar genom dem projicerar de dekorationer som finns i glaset på väggar, golv och andra strukturer i byggnaden. Bilden ovan från Nasir al-Molk i Shiraz visar ett vackert exempel på det. Denna typ av fenomen kan man utnyttja i geometrilektioner. Ett exempel på en uppgift:

Ett ljusknippe från en punktformad ljuskälla passerar en cirkulärt glasfönster av diametern 1,0 m med ett blommotiv. Ljusknipppet träffar en vägg parallell med glasfönstret där blommotivet avbildas likformigt och i större skala.

- Bestäm arean hos avbildningen. Avstånden visas i figuren.
- Om ljuskällan närmar sig rakt fram mot fönstret med farten 1,0 m/s, med vilken hastighet ökar arean hos den avbildade figuren?



LITTERATUR

- Foster, V. (2006). *El arte del vidrio*. Spanien: Lisma Ediciones, S.L.
- Parera-Lopez, J. (2012). Blomstrande matematik med digitala imitationer. *Nämna* 2012:2.
- Parera-Lopez, J. (2012). Från modern konst till skolmatematik. *Nämna* 2012:4.
- Penrose, R. (1989). *The emperor's new mind*. England: Oxford University Press.