

## Det handlar om symmetri

Här ges en inledande presentation till en grupp artiklar i detta nummer som behandlar symmetri och hur vi kan arbeta med det i klassrummet. Vi får också utdrag ur de nya kursplanerna, där olika motiv för att arbeta med symmetri uttrycks. Även problemavdelningen tar upp symmetri. På Nämnaren på nätet finns ytterligare en artikel med klassrumsexempel och också en lista med förslag till läsning om symmetri och med länkar. Tillsammans hoppas vi att detta ger en bra grund för arbetet med symmetri.

När vi ser oss i spegeln kan vi beskriva det vi ser på olika sätt. Huvudet har en oval form, ögonen är små och gröna, näsan rak eller lite sned. Vi beskriver form, storlek och färg, egenskaper hos linjer och ytor. Men det finns fler egenskaper som ett fysiskt objekt kan ha. Tänk dig att du sätter kanten på spegeln mitt emellan ögonen. Ditt halva ansikte tillsammans med bilden i spegeln ger en ny bild. Bilden har en egenskap som vi brukar kalla symmetrisk, bilden blir oförändrad om vi speglar den längs en linje som i det här fallet är spegelns kant. Om bilden ser exakt ut som ditt ansikte har du ett symmetriskt ansikte, men i verkligheten är mänskliga ansikten sällan exakt symmetriska. I stora drag uppfattar vi våra ansikten och kroppar som symmetriska med avseende på en lodrät linje mellan ögonen. Vi har ju trots allt ett öga på varje sida om näsan och inte två på ena sidan och tre på den andra.

Det är inte bara människokroppen som uppfattas som symmetrisk utan det är en genomgående egenskap bland växter och djur. Vi människor har även valt att skapa miljöer där symmetrier förekommer. En del hävdar att vi finner det tilltalande och vackert medan andra hävdar att symmetriska föremål är tråkiga och ointressanta.

I *Matematiktermer för skolan* (Kiselman & Mouwitz, 2008) definieras symmetri som "egenskapen att vara oförändrad under en viss bijektiv<sup>1</sup> avbildning". Ordet kommer från grekiska *symmetría*, jämförande mätning. Den symmetri jag

har beskrivit i inledningen kallas *reflektion* eller *spegling*, men det finns också andra typer som *glidreflektion*, *rotation* och *translation*.

### Symmetri inom matematiken

Inom matematiken ser man en symmetri som en funktion. I skolans matematik är funktioner ofta förknippade med att man till ett tal ordnar exakt ett annat tal genom någon regel. Men inom matematiken kan man para ihop vilka typer av objekt som helst och så länge varje objekt paras ihop med exakt ett objekt kallas det för funktion. I vårt exempel med ansiktet parar vi ihop geometriska objekt och då brukar man ofta kalla dessa funktioner för *transformationer* (se *Matematiktermer för skolan*). Vissa transformationer, tex förstoringar och förminskningar, resulterar i att objektet blir förändrade. Andra, dvs symmetrier, leder till oförändrade objekt.

Man har inom matematiken intresserat sig för att studera *mängden* av alla symmetrier för ett visst objekt och vad som händer då man sätter samman symmetrierna. Det finns paralleller mellan mängden av symmetrier och operationen "sätta samman symmetrier" och mängden av alla heltal och operationen addition eller multiplikation. För en rektangel som inte är en kvadrat finns det fyra symmetrier däribland rotation 180 grader och spegling i en linje genom mittpunkten parallell med en av sidorna. Att rotera 180 grader och därefter spegla i linjen ger samma resultat som att först spegla och sedan

<sup>1</sup>"bijektiv avbildning" betyder ett ett-till-ett förhållande mellan två mängder, varje element i den ena motsvaras av ett element i den andra. Inget element "blir över" om man projicerar den ena på den andra och vice versa.

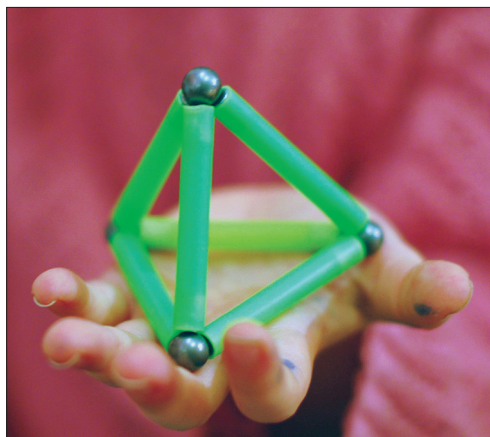
rotera 180 grader. I vilken ordning man sätter samman de fyra symmetrierna har ingen betydelse. Detta gäller för alla fyra symmetrier för en rektangel som inte är en kvadrat. På samma sätt ger  $2+3$  samma resultat som  $3+2$ , vilket är sant för alla heltal. Båda operationerna är i dessa fall *kommutativa*. (Detta gäller just för denna symmetrigrupp, däremot är exempelvis gruppen av symmetrier för en liksidig triangel inte kommutativ.) En annan parallell är att det till varje symmetri finns en symmetri som innebär att man "ångrar sig", en *invers*. En rotation 180 grader motsols har inversen rotation 180 grader medsols och talet 3 har inversen  $-3$ . Symmetri åtföljt av inversen ger tillsammans en speciell symmetri, dvs den som inte gör något alls. 3 plus  $-3$  ger ju noll och talet noll har samma egenskap att inte göra något alls,  $3+0=3$ .

Utforskandet av mängder av symmetrier och operationer på dessa mängder bidrog under 1800-talet till utvecklingen av en ännu mer generell teori, grupp teori. Tre till synes helt olika områden: symmetrier, permutationer och kongruensräkning utvecklades parallellt och förenades till slut inom grupp teorin. Även våra olika talområden (naturliga tal, heltal, rationella tal ...) kan betraktas som grupper. Men det tog tid för matematikerna att se sambanden. De idéer Galois skrev på natten innan han dog i en duell 1832 var det egentligen ingen som förstod betydelsen av förrän i slutet av 1800-talet då man till slut fann en definition av begreppet grupp. Grupp teori anses vara ett svårt område inom matematiken och det återfinns oftast först på avancerad nivå. Men även intresserade gymnasieelever kan ta till sig området, tex i KTH:s matematiska cirklar.

Begreppet symmetri har viktiga tillämpningsområden, bla används det av kemister för att förstå kristallers strukturer, av fysiker för att förutse försöksresultat vid CERN och av biologer vid undersökningar av virus. (Marcus du Satoy ger i sin presentation exempel på detta).

## Symmetri för lust och lärande

Att urskilja att det bakom till synes olika fenomen finns gemensamma strukturer och begrepp är en del av tjusningen och drivkraften till att utveckla och lära sig matematik. Det kan ses som delar i de matematiska aktiviteter som beskriver människors – barns och vuxnas – behov av att *leka* och *förklara*.



– *Mamma den är samma, samma och samma!*  
utbrister Minna, 4 år, medan hon vrider, vrider och vrider...

*Grundläggande för allt lärande, men i synnerhet matematikinläring, är upptäckandet och urskiljandet av likheter och olikheter. Det lilla barnet jämför intuitivt företeelser i sin omvärld när det rör sig i rummet, upptäcker eller utforskar handlingars utfall. I och med att barnet upptäcker att saker och ting skiljer sig åt, öppnar sig möjligheten för barnet att urskilja vad som är lika eller olika och att generalisera och bilda begrepp.*

(Ur UI0.027)

Att undersöka och studera symmetrier kan ge eleverna möjligheter att utveckla olika förmågor, som att lösa problem, resonera, kommunicera och modellera. I arbetet med symmetri får eleverna "... möjligheter att reflektera över matematikens betydelse, användning och begränsning i vardagslivet, i andra skolämnen och under historiska skeenden och därigenom kunna se matematikens sammanhang och relevans" och "relatera matematiken till dess betydelse och användning inom andra ämnen, i ett yrkesmässigt, samhällligt och historiskt sammanhang". Studier av symmetrier kan också ge eleverna "möjlighet att uppleva estetiska värden i möten med matematiska mönster, former och samband". Att uppleva estetiska värden kan tolkas som att upplevelsen kan vara intellektuell, tex en fascination över ett överraskande resonemang. Det kan också innebära att eleverna kan uppleva tex symmetrier rent

visuellt. De digitala verktygen ger oss bra möjligheter att visualisera och experimentera med symmetribegreppet. Samtidigt som eleverna undersöker och studerar symmetrier kan de också "utveckla sin förmåga att använda digital teknik, digitala medier" för att "undersöka problemställningar". (Citat ur Lgr II och Gy II)

Att studera symmetrier i vår omgivning, inom geometri och hos funktionsgrafer m m kan också bidra till att elever övar upp en generell förmåga att inom matematiken se samband och mönster – symmetrier i en vidare bemärkelse. Det finns "symmetrier" att upptäcka hos tal och operationer på tal, t ex att  $2+3$  är det samma som  $3+2$ , och multiplikationstabellen innehåller mängder av mönster och symmetrier. Vid ekvationslösning behöver varje behandling av en likhet vara "symmetrisk" i betydelsen att "göra samma sak på bägge sidor om likhetstecknet" så att t ex  $x+3=7$  blir ekvivalent med  $x+3+(-3)=7+(-3)$ . Trigonometriska formler är lättare att behärska om man ser "symmetrier" mellan dem. Proportionella samband har vissa "symmetriska" egenskaper till skillnad från exponentiella och studeras t ex inom yrkesprogrammet matematik Ia.

## Symmetri i styrdokumentet

I grundskolans kursplan och gymnasieskolans ämnesplan som börjar gälla hösten 2011 inkluderas begreppet symmetri vilket inte görs explicit i kursplanerna från 2000. Internationellt förekommer symmetri i kursplaner i t ex Finland, England och Kina. I USA är området sen länge etablerat, speciellt i samband med studier av grafer till funktioner (Usiskin, 2010).

Redan i förskolan kan barnen få bekanta sig med symmetri. Förskolan ska, enligt målen i läroplanen, sträva efter att varje barn "utvecklar sin förståelse för rum, form, läge och riktning och grundläggande egenskaper ...". Barnen ska även "utveckla sin förmåga att urskilja, uttrycka, undersöka och använda matematiska begrepp och samband mellan begrepp". Förståelse för *form* kan mycket väl inkludera förmågan att urskilja, undersöka och uttrycka begreppet symmetri. I de matematiska aktiviteter som skrivs fram i *Förskola i utveckling – bakgrund till ändringar i förskolans läroplan* (UIO.027) ryms symmetrier.

- ◇ *Lokalisera*: "att uppleva, jämföra och karakterisera egenskaper hos rummet, inomhus, utomhus, i planerad miljö och natur....//... Utveckla sin kroppsuppfattning....//... Skapa representationer av sig själv och omgivningen med konkret material, teckningar, bilder, ord och andra uttrycksformer samt utveckla symboliskt tänkande"
- ◇ *Mäta*: "Uppmärksamma och undersöka olika typer av egenskaper hos föremål och fenomen, t ex storlek, temperatur, längd, bredd, höjd, vikt, volym, hållfasthet och balans. Jämföra, ordna, bestämma och uppskatta egenskaper samt se likheter och skillnader."
- ◇ *Konstruera*: "Sortera och karakterisera objekt med tanke på egenskaper som storlek, form, mönster och samband. Formge och konstruera former och objekt med olika material. Utforska egenskaper hos geometriska objekt som t ex cirklar, trianglar, och rektanglar. Representera konstruktioner med avbildningar, ord och andra uttrycksformer. Resonera kring egenskaper, perspektiv och proportioner."

I grundskolan och gymnasieskolan ska undervisningen behandla det som skrivs fram under centralt innehåll. Under rubriken *geometri* finns explicit begreppet symmetri:

*Åk 1–3*: Symmetri, till exempel i bilder och i naturen, och hur symmetri kan konstrueras.

*Åk 4–6*: Symmetri i vardagen, i konsten och i naturen samt hur symmetri kan konstrueras.

*Åk 7–9*: Likformighet och symmetri i planet.

*Matematik Ia, yrkesprogram*: Geometriska begrepp valda utifrån karaktärsämnenas behov, till exempel skala, vektorer, likformighet, kongruens, sinus, cosinus, tangens och symmetrier.

*Matematik Ib för Samhällsvetenskapsprogrammet, Estetiska programmet, Ekonomiprogrammet och Humanistiska programmet*: Begreppet symmetri och olika typer av symmetriska

transformationer av figurer i planet samt symmetriens förekomst i naturen och i konst från olika kulturer.

Undervisningen ska även behandla geometriska objekt där fokus ligger på *objektens egenskaper och inbördes relationer*. I åk 7–9 tillkommer även ”geometriska satser och formler och behovet av argumentation för deras giltighet”. I *Matematik 2b och 2c* på gymnasiet behandlas ”användning av grundläggande klassiska satser i geometri om likformighet, kongruens och vinklar.” I samband med detta innehåll kan symmetri vara ett viktigt begrepp att belysa och använda sig av. En annan aspekt som skrivs fram under geometri i grundskolan är *konstruktioner av geometriska objekt* som i åk 7–9 även inkluderar avbildningar. Här finns det utrymme att handfast uppleva symmetri. Även i gymnasieskolan finns detta med för yrkesprogrammen och S, Est, Ek, Hum:

*Ia:* Egenskaper hos och representationer av geometriska objekt, till exempel ritningar, praktiska konstruktioner och koordinatsystem.

*Ib:* Representationer av geometriska objekt och symmetrier med ord, praktiska konstruktioner och estetiska uttrycksätt.

Symmetrier kan även användas för att konstruera, beskriva och uttrycka geometriska mönster som tas upp under rubriken *Algebra* i åk 1–3 och 4–6. Under rubriken *Samband och förändring* åk 4–6 ryms koordinatsystem, grafer och i åk 7–9 funktioner som sedan fördjupas i gymnasieskolans kurser. Representation av funktioner med hjälp av grafer ger upphov till ett geometriskt objekt som kan ha symmetriska egenskaper. I gymnasieskolan *Matematik 2b, 2c, 4* studeras tex egenskaper hos andragsgradsfunktioner, absolutbeloppet som funktion och de trigonometriska funktionerna vars grafer är symmetriska (för övrigt är det en spännande uppgift att låta gymnasieelever försöka konstruera funktioner vars grafer *nåstan* är symmetriska). Även normalfördelningen, som behandlas i *Matematik 2b* och *2c*, har symmetriska egenskaper.

Matematisk formulering av frågeställningar utifrån enkla, vardagliga situationer och olika ämnesområden kan behandla problem som handlar om eller löses med hjälp av symmetri. Med tanke på symmetriens förekomst inom konsten i olika kulturer genom tiderna kan det även finnas möjlighet att behandla begreppet som exempel på ”matematiska problem med anknytning till matematikens kulturhistoria” som finns under rubriken *Problemlösning* i gymnasieskolans ämnesplan.

## LITTERATUR OCH LÄNKAR

- Kiselman, C. & Mouwitz, L. (2008). *Matematiktermer i skolan*. NCM, Göteborgs universitet.  
KTH matematiska cirklar. [www.math.kth.se/cirkel/2006/](http://www.math.kth.se/cirkel/2006/)  
du Satoy, M. *Symmetry, reality's riddle*. [www.youtube.com/watch?v=415VX3QX4cU](http://www.youtube.com/watch?v=415VX3QX4cU)  
Usiskin, Z. (2010). Closing remarks, Reflections från a retiring mathematics curriculum developer. I Z. Usiskin, K. Andersen & N. Zotto (red), *Future curricular trends in school algebra and geometry, proceedings of a conference. Research in mathematics education*. Greenwich, USA: Information age publishing.

Styrdokumentet:

- U10.027 *Förskola i utveckling – bakgrund till ändringar i förskolans läroplan*. Tillgänglig på [www.regeringen.se/sb/d/14042/a/158951](http://www.regeringen.se/sb/d/14042/a/158951)  
*Läroplan för förskola, Lpfö 98. Reviderad 2010*. Tillgänglig på [www.skolverket.se/sb/d/165/a/1841](http://www.skolverket.se/sb/d/165/a/1841)  
*Läroplan för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet, Lgr II*. Tillgänglig på [www.skolverket.se/sb/d/165/a/1841](http://www.skolverket.se/sb/d/165/a/1841)  
*Förordning om ämnesplaner för de gymnasiegemensamma ämnena*. Tillgänglig på [www.skolverket.se/sb/d/4168](http://www.skolverket.se/sb/d/4168)

På Nämnares på nätet finns en lista med länkar, material, böcker och artiklar på olika nivåer som ytterligare kan berika området symmetrier.