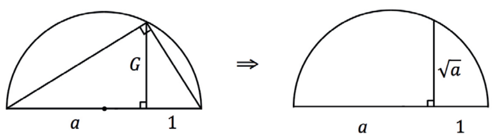
Lasse Berglund

Hurra för roten ur *a*

I denna artikel inleder vi med att på klassiskt vis konstruera en sträcka med passare och ograderad linjal. Sen blandar vi upp det antika med lite nyare matematik för att se hur epokerna berör varandra. Men allra först ska vi skaffa oss en bild av det reella talet $\sqrt{a}$. Likformiga trianglar i halvcirkeln ger:

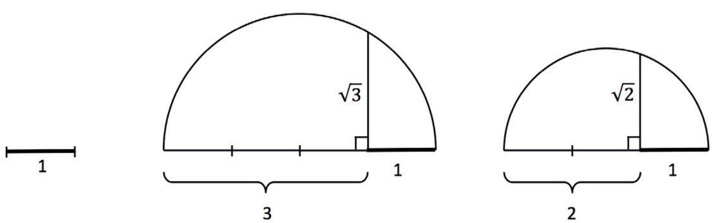
$$\frac{G}{a}=\frac{1}{G}\Rightarrow G=\sqrt{a}$$



Figur 1 a, b

Se figur 1 b, där vi har vår kvadratrot i form av en sträcka.
Nu över till jobbet där vi avser att konstruera sträckan $\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$.

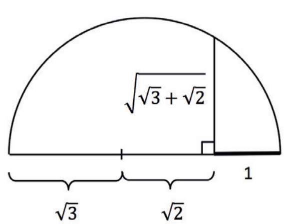
Om vi tillåter oss att betrakta delningen av en sträcka mitt itu och konstruktionen av en rät vinkel så som självklarheter, så har vi bara att införa en *enhetssträcka*, 1 längdenhet, och sen köra igång. Med passaren placerar vi ut ett antal av dessa enhetssträckor och konstruerar därefter två halvcirklar, se figur 2.



Figur 2

Sambandet från figur 1 b ger direkt att vi redan har de två termerna i talet som vi vill skapa. Återstår att dra roten ur summan, så med passaren i hand lägger vi våra två sträckor intill varandra och fortsätter sedan med en konstruktion på precis samma sätt helt enkelt, se figur 3. Så här kan man sen hålla på så länge man har lust, men vi nöjer oss här.

Vi har därmed konstruerat talet $\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ $\approx 1{,}8$ där approximationen är inlagd för den som med ögonmått vill göra en jämförelse med enhetssträckan i figuren.



Figur 3

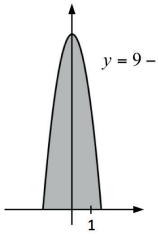
Sedan mitten av 1800-talet är det bevisat att de så kallade *transcendenta talen* inte går att konstruera. Alla konstruerbara tal är så kallade *algebraiska tal*, dvs lösningar till polynomekvationer med heltalskoefficienter. Den intresserade kan visa att vårt tal ovan är en lösning till ekvationen $x^8-10x^4+1=0$.

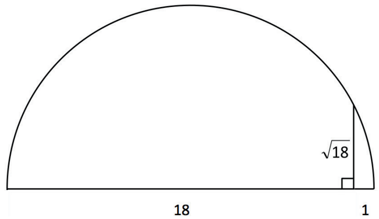
Parabelns kvadratur

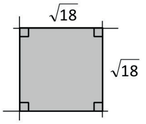
Ett av matematikens mest berömda problem är *cirkelns kvadratur,* dvs att enbart med hjälp av de verktyg vi använt här, konstruera en kvadrat med lika stor area som en given cirkel. Detta är dock omöjligt, då det är bevisat att π är transcendent. Detta lite dystra resultat får oss därför att rikta våra blickar mot *parabeln* istället: skulle man inte kunna konstruera en kvadrat utifrån en given parabelarea? Även om detta stickspår mest är kuriosa, gör vi ändå ett försök:

$A = \int_{-1.5}^{1.5} \left(9 - 4x^2\right) dx = 18$ areaenheter, se figur 4 a.

Figur 4 a, b, c





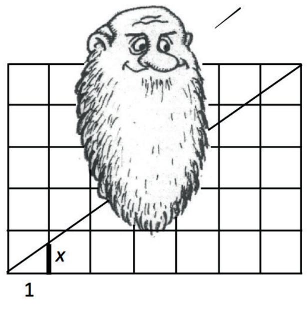


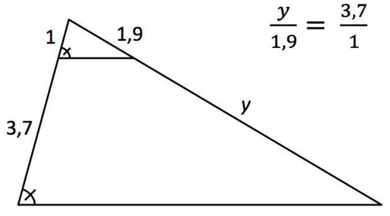
Nu letar vi upp enhetssträckan och lägger sen med hjälp av passaren ut 18 stycken likadana sträckor intill, och konstruerar en – vadå? Jo, en halvcirkel så klart, se figur 4 b. Ord är överflödiga: där står den, grann och hantverksmässigt skapad, kvadraten med exakt samma area som parabelarean: 18 a e.

Vad kan egentligen konstrueras?

Redan Euklides visste att alla heltal *a* och *b* går att konstruera, och därifrån även $a+b$, $a-b$, $a \cdot b$ och a/b, dvs alla rationella tal. Figur 5 visar två av fallen.

Figur 5





Euklides konstruerade mer än så, men det var först på 1800-talet som frågan blev fullständigt utredd.

Tack vare vår fantastiska figur 1 b inser vi att alla varianter med *kvadratrötter* går att konstruera. Men å andra sidan – ingenting annat går: inte tredjerötter, inte femterötter osv. Inte exempelvis $2^{1/3}$, dvs kuben kan inte fördubblas. Men $7^{1/64}$ går bra, eftersom

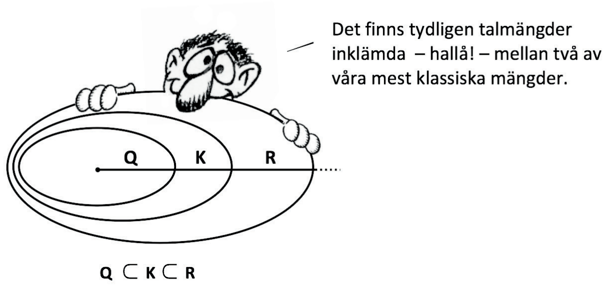
$$7^{\frac{1}{64}} = \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{7}}}}}}$$

Man ritar helt enkelt upp halvcirklar sex gånger om i en rekursiv process.

Kroppsutvidgning

I botten på detta ligger, att konstruktioner med passare och linjal aldrig kan leda till något annat än möten kors och tvärs mellan linjer och cirklar med sina *första-* och *andragradsekvationer*. Mer allmänt reds frågan ut med begreppet *kroppsutvidgning*. Här kan vi bara kort konstatera, att en talmängd kallas för en *kropp* om den är sluten under de fyra räknesätten. Exempelvis är $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ och $\mathbb{C}$ kroppar men inte $\mathbb{Z}$ då division leder ut ur mängden av heltal.

Alla tal på formen $x + y\sqrt{a}$ med x, y och a rationella i första vändan är konstruerbara och man visar enkelt att de förblir på denna form under de fyra räknesätten, hur många utvidgningar vi än gör. De konstruerbara talen utgör alltså en kropp och om vi kallar denna kropp för $\mathbb{K}$, har vi att $\mathbb{K}$ utgör en delmängd av $\mathbb{R}$ men är större än $\mathbb{Q}$, se figur 6.

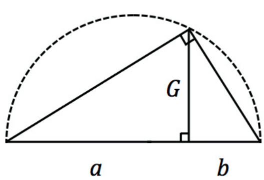


Figur 6

$\sqrt{-1}$ hittar äntligen hem

Vår grafiska tolkning av $\sqrt{a}$ är bara ett specialfall av det så kallade *geometriska medelvärdet* $\sqrt{ab}$. Samma likformighet som tidigare ger:

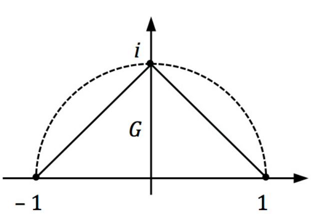
$$\frac{G}{a} = \frac{b}{G} \Rightarrow G = \sqrt{ab}$$



Figur 7

I slutet på 1700-talet gjorde norrmannen Wessel (1745–1818) en iakttagelse runt detta medelvärde som skulle få enorma konsekvenser. Han fann, att om man satte de två sträckorn *a* och *b* lika långa, en längdenhet vardera, och sedan lade in hela figuren i ett koordinatsystem, fick man:

$$G = \sqrt{(-1) \cdot 1} = \sqrt{-1} = i$$



Figur 8

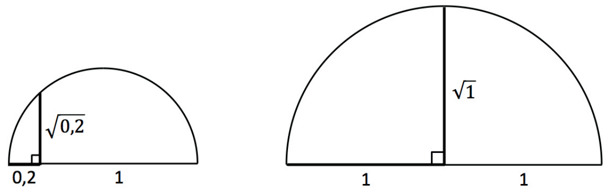
Därmed var en geometrisk tolkning av talet *i* etablerad för första gången. Detta blev sen den grund som Gauss (1777–1855) och senare Hamilton (1805–1865) m fl byggde upp hela det komplexa talplanet på.

Slutkommentar 1:

Att randvinkeln i våra figurer alltid är rät ges av *Randvinkelsatsen* enligt $180°/2 = 90°$.

Slutkommentar 2:

Om vissa elever har svårt att känna in att $\sqrt{a} > a$ då $a < 1$, eller kanske till och med undrar varför $\sqrt{1} = 1$, ritar man förslagsvis upp nånting som detta:



LITTERATUR

Courant, R. & Robbins, H. (1947). *What is mathematics?* Oxford University Press.

Kaplan, R. & Kaplan, E. (2003). *The art of the infinity.* Oxford University Press

Nahin, P. J. (1998). *An imaginary tale: the story of* $\sqrt{-1}$. Princeton University Press

Nicklasson, L. & Zickert, G. (2017). *Geometriska konstruktioner.* KTH, Stockholm.

Vad är en kropp?

Algebraiska strukturer beskriver tal och räkneoperationer på ett generellt och systematiskt sätt. Tal kan delas in i olika talmängder, där till exempel $\mathbb{N}$ betecknar mängden av naturliga tal $\{0, 1, 2, ...\}$, $\mathbb{Z}$ betecknar mängden av hela tal $\{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$ och $\mathbb{Q}$ betecknar mängden av rationella tal, det vill säga alla tal som kan skrivas på formen a/b där a och b är hela tal.

En algebraisk kropp är en struktur som innefattar dels en mängd element (till exempel tal), dels två operationer som följer de kommutativa, associativa och distributiva lagarna. Det ska även finnas neutrala element i relation till de båda operationerna och inverser till varje element.

Mängden $\mathbb{N}$ är ingen kropp eftersom inverser saknas. De naturliga talen kan adderas och multipliceras för att ge nya naturliga tal, och de neutrala elementen 0 för addition och 1 för multiplikation existerar i mängden. Men inversen till ett naturligt tal, säg 5, skulle vara ett tal a sådant att $5 + a = 0$ eller ett tal b sådant att $5 \cdot b = 1$. Eftersom det inte finns sådana tal a och b i mängden $\mathbb{N}$ har vi ingen kropp. Mängden av rationella tal, $\mathbb{Q}$, är däremot en kropp. Läs mer i Linda Marie Ahl och Ola Helenius artikel *Talens grammatik – grupper, ringar och kroppar* på Nämnaren på nätet.