Strövtåg
med Lasse Berglund

Bortom vardagen

Som ett komplement till all den matematik som behandlar vardagliga och närliggande räkneproblem från det som brukar kallas verkligheten, och som ofta anropas som den kontext som ska höja matematikintresset i den svenska skolan, följer här några rader från mer avlägsna trakter.

Mot oändligheten

En summa där termerna aldrig tar slut kallas för en *serie*. Stannar man upp någonstans på vägen har man beräknat en så kallad *delsumma*. För tillräckligt snälla serier gäller att antingen blir seriens summa oändligt stor eller så har serien ett värde, ett tal som den *konvergerar* mot. Det senare resultatet kan kanske få en och annan gymnasieelev att höja på ögonbrynen: måste inte en summa alltid bli oändligt stor om den har oändligt många termer?

Serien nedan är den så kallade *harmoniska serien*:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots$$

Låt oss beräkna en delsumma.

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}=2,45$$

Drar vi nu till med, säg en miljon termer, får vi:

$$1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{10^6}\approx 14,4$$

Delsumman verkar växa oerhört långsamt. För att försöka övertyga oss om att summan troligen inte kan bli hur stor som helst hugger vi till med ett tal bortom allt förstånd och vi får:

$$1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{10^{80}}\approx 184,8$$

Vi ser att om antalet termer är fler än alla atomer i hela universum(!), så är summan inte ens uppe i 185. Frågan blir: går det att få denna summa hur stor som helst, eller har den en övre gräns? I ett försök att reda ut detta vänder vi för en stund våra blickar mot Cantor och hans teori för oändliga mängder.

Cantors uppfattning om det oändliga

För en ändlig mängd gäller helt naturligt att en delmängd alltid är mindre än mängden själv. ”Om fem elever blir hemma en dag, är det färre elever i klassen än då alla är där.” Det som utmärker en oändlig mängd däremot är enligt Cantor exakt det motsatta: i en oändlig mängd finns det alltid delmängder som är precis lika stora som mängden själv. Detta låter minst sagt besynnerligt, så hur kan Cantor ha resonerat? Jo på samma sätt som ett barn som ännu inte har lärt sig att räkna, men som ändå vill avgöra vilken sorts godsaker hon har flest av: hallon- eller lakritsbåtar. Hon parar helt enkelt ihop dem två och två – en svart en röd – och lägger dem allteftersom tillbaka i skålen. När hon inte kan para samman längre, utan står där med fyra hallonbåtar, vet hon, utan minsta tvivel men framför allt – *utan att ha räknat* – vilken mängd som är störst.

Om vi betraktar de naturliga talen 1, 2, 3, ... och markerar exempelvis de i treans tabell, får vi:

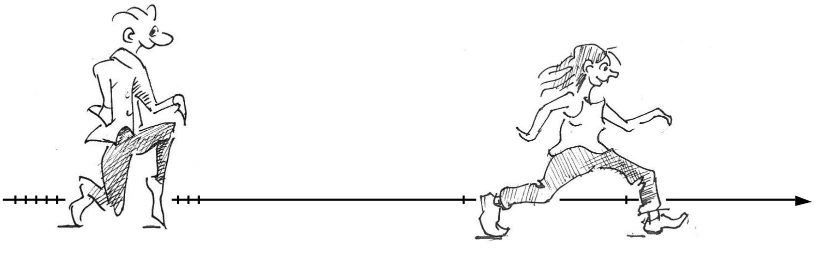
1 2 **3** 4 5 **6** 7 8 **9** 10 11 **12** 13 14 **15** 16 ...

Cantor påstår nu att det inte finns ett enda tal mer i den givna talföljden 1, 2, 3, ... än i den som är markerad, trots att den senare helt uppenbart bara är en utspädd delmängd. För att se detta parar vi ihop dem, så som Cantor angav och så som barnet gjorde:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \ldots \\ | & | & | & | & | & | & \\ 3 & 6 & 9 & 12 & 15 & 18 & \ldots \end{array}$$

Det framgår att de två oändliga mängderna löper fram parallellt hela vägen ut. Inget tal i någondera rad kommer att bli utan en partner. Här har vi med Cantors ord en *en–till–en-korrespondens*, en *bijektion*. De två mängderna är enligt Cantor lika *mäktiga*.

Delmängden behöver så klart inte vara just treans tabell. Därför har vi t ex följande scenario, i linje med logiken men eventuellt på tvärs med vardagens tankar: om Pelle trippar fram på tallinjen och sätter ner foten på varje heltal, 1, 2, 3, ... medan Lisa stegar fram med mer rejäla kliv, på säg bara vart femhundrade tal, 500, 1000, 1500, ... så kommer hon ändå ha satt ner foten på exakt lika många ställen som Pelle.



Den harmoniska serien har ingen gräns

Vi återgår till serien som vi studerar och för att utröna om den eventuellt har en övre gräns inför vi några lämpliga parenteser.

$$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\ldots+\frac{1}{16}\right)+\ldots=$$

Tillsammans med våra elever inser vi att om vi i var och en av dessa parenteser ersätter alla nämnare med parentesens största nämnare, så blir alla dessa termer *mindre*: ju större nämnare, desto mindre kvot. Vi gör nu alltså en skattning nedåt av vår serie, dvs vi förminskar den.

$$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{16}\right)+\ldots=$$

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{4}{8}+\frac{8}{16}+\ldots=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots$$

Essensen av detta – självklar men ändå en smula svårsmält – är att dessa halvor inte är färre till antalet utan exakt lika många som originalseriens termer, även om exempelvis den fjärde halvan består av åtta termer i originalserien och den 44:e halvan består av mer än 17 tusen miljarder termer i originalserien.

En summa av oändligt många halvor är så klart oändligt stor. Vi kan alltså konstatera att vår misstanke om konvergens var felaktig. Den harmoniska serien kan bli hur stor som helst även om det går fruktansvärt långsamt. En fråga vi kan ställa oss är hur många termer vi måste ta med för att summan ska överstiga talet B definerat enligt

$$B = (S+1)! + S + 1$$

där S är Skewes tal $S = 10^{10^{10^{34}}}$.

Mer att läsa om Skewes tal och talet B finns i artikeln *Världens största tal* som publicerades i Nämnaren 2005:1.

Bridge over troubled water

Än mer orimligt kan säkert en del elever tycka, är att nånting som man adderar *utan att någonsin sluta* kan få ett ändligt värde. Betrakta därför följande samband:

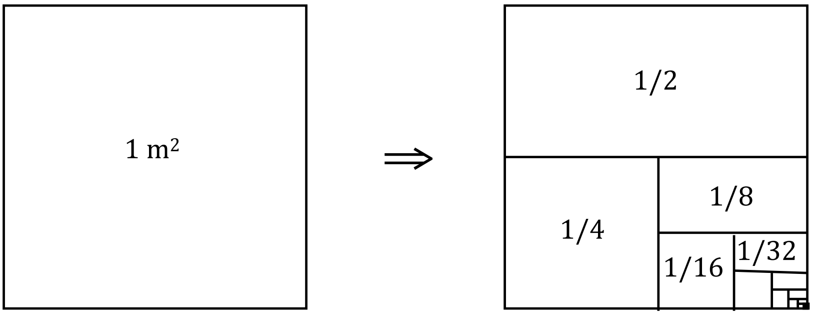
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \ldots = 1$$

Det finns en spänning mellan de två sidorna i likheten ovan, en spänning som triggar vår fantasi. I vänsterledet har vi oändligheten med hela sitt vidöppna landskap, i högerledet något slutet, komplett, ändligt. Sambandet står där och liksom pekar på en avgrund, den kanske mest hisnande som människan känner: gränsen mellan det ändliga och det oändliga. Och ändå finns där ett likhetstecken, som en bro över detta ofattbara språng.

En enkel betraktelse över en bit papper visar att sambandet verkligen stämmer.

- Lisa har ett pappersark.
- Hon ska nu riva av hälften och ge bort den ena delen till Pelle.
- Sen tänker hon fortsätta på samma sätt och ge bort hälften av hälften av hälften ...

Från figuren framgår, att hur många bitar hon än river av, kan mängden papper hon ger bort aldrig överstiga det papper som hon utgick ifrån även om hon håller på utan att någonsin sluta.



Avslutningsvis

Om någon läsare eventuellt undrar hur i hela fridens namn jag har orkat lägga ihop alla de 10^{80} termerna, är svaret att beräkningen blir enkel om man är bekant med den *matematiska* kontext där dessa räkneövningar ingår. Med elementär gymnasiekunskap i integralkalkyl och kännedom om *Eulers konstant C*, given enligt följande för stora värden på *n*:

$$C = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} - ln(n) \approx 0,577$$

får vi med räknarens hjälp att den harmoniska summan med 10^{80} termer blir

$$ln(10^{80}) + 0,577 \approx 184,8 \ .$$

Kort historik

Georg Cantor, 1845–1918, tysk matematiker och mängdlärans upphovsman. Leonhard Euler, 1707–1783, historiens mest kreative matematiker. En grafisk betraktelse ger att *Eulers konstant C* är arean av rektangelsumman minus arean under kurvan $y = 1/x$, dvs det grå området i figuren nedan.