Levande matematik

*Kan man göra matematiken på samhällsvetenskaplig och ekonomisk linje mer levande? **Birger Jörgensen** och **Bengt Åhlander**, Vänersborg, har försökt och resultatet redovisades vid biennalen i Göteborg 1992. Utställningen blev en av de två vinnande idéutställningar , som belönades med Nämnarens resestipendium. I slutet av artikeln tar de också upp några konkreta modeller för NT-linjen*

Många elever på dessa linjer har stora svårigheter att ta till sig matematiken. De tycker, liksom vi, att den är alltför teoretisk. De ser inte tillämpningen av det vi försöker lära dem. Vi anser, att om matematiken skall ha ett berättigande på SE-linjen, så skall den utveckla tankar och logik hos eleverna. Man måste då utgå från modeller som eleverna kan ta till sig, modeller som deras tankar kan utveckla ut ifrån. Vi ger några exempel på försök som vi använt oss av i vår undervisning.

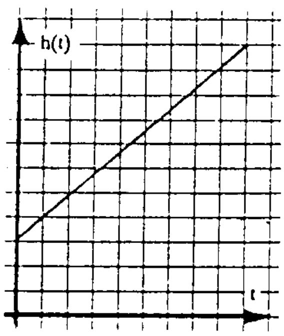
Funktionsbegreppet

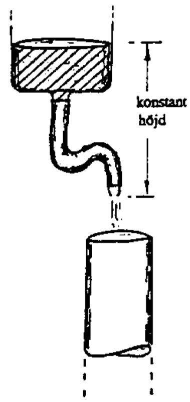
Vi startade med att införa några konkreta försök på SE-linjen. Som utgångspunkt valde vi matematiken runt omkring - vatten mängd och vattenmstråle. Ett långt rör där vatten fick rinna i och ur blev en utmärkt modell. Funktionsbegreppet kunde införas på ett mycket åskådligt sätt. Eleverna var aktiva och förståelsen för funktioner ökade markant.

Försök 1

Att i ett 1 m långt rör studera hur vattennivån stiger som funktion av tiden.
Materiel: Ett 1 m långt glasrör som är slutet i nedre ändan samt påfyllningshållare med slang. Tillströmningshastigheten hålles konstant. Se figur.

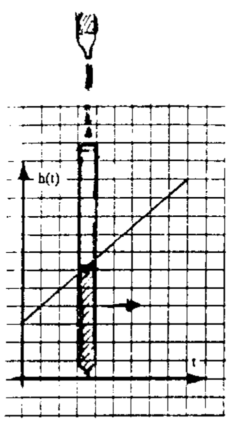
- Höjden h som funktion av tiden t, h(t) bestämmes och uppritas i ett diagram.

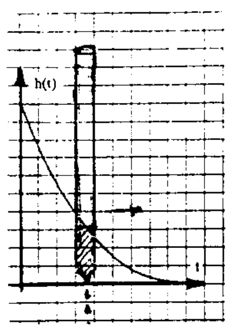


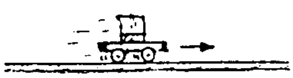


- Funktionen $y = kx + m$ diskuteras med avseende på k och m.

Vi lät t ex röret glida utmed uppritade diagram och eleverna kunde följa hur vattennivån följde kurvan. Vår modell kunde sedan användas som konkretisering av många uppgifter i matematikboken.







Derivata

Det stora lyftet för eleverna blev när vi kom in på ändringskvot och derivata på SE-linjen.

Begrepp som Δx, Δy, $\Delta y/\Delta x$, lim $\Delta y/\Delta x$ då $\Delta x \to 0$, dy/dx och tangenten blev mycket påtagliga för eleverna.

Ett försök gick bland annat ut på att låta elever mäta ändringskvoterna var 10:e sekund genom att samla upp utrunnet vatten i smala rör.

Försök 2

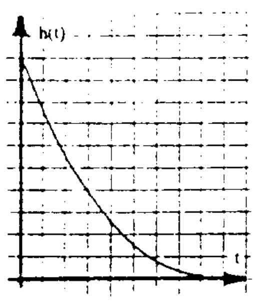
Vattnet i röret släpps ut med varierande hastighet.

Praktiska mätningar av ändringskvot och derivata.

a) *Att med hjälp av nivåmarkeringar på röret beräkna*

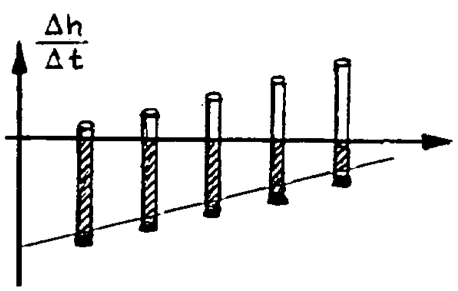
$$\frac{h(11)-h(9)}{11-9}, \quad \frac{h(21)-h(19)}{21-19}, \ldots \text{osv}$$

Värdena införs i tabell.



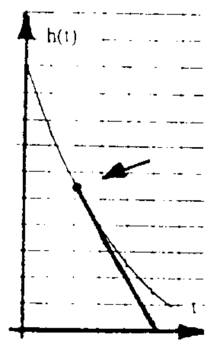
b) *Att ur grafen bestämma ändringskvoter $\Delta h/\Delta t$* i olika tidsintervall. Värdena införs i tabell.

c) *Att fånga ändringskvoten i ett glasrör.* Δh bestämmes genom att samla upp det utrunna vattnet under 2 sek i ett smalare rör. Man erhåller på detta sätt en förstoring av h. Ändringskvoterna bestämmes på detta sätt var 10:e sekund. Värdena införes i tabell.



d) *Att bestämma förändringshastigheten vid en viss tidpunkt genom att hålla utströmningshastigheten konstant*:
Konstant utströmningshastighet erhålles genom att röret påfylles med lika mycket vatten som rinner ut (vattennivån hålles konstant). Utströmmat vatten fångas upp under 10 sekunder.
För att sedan mäta förändringshastigheten dh/dt vid den aktuella tidpunkten, häles det uppfångade vattnet tillbaka i röret. Nivåhöjningen dh uppmätes där dt = 10 sekunder. Försöket görs vid vattennivåerna h(0), h(10), ..., det vill säga vid tidpunkterna t = 0, t = 10, t = 20, ... osv. dh/dt beräknas. Värdena införs i tabell.

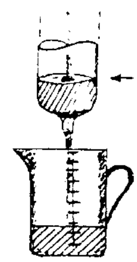
e) *Att med hjälp av grafen bestämma lutningen dh/dt på "förändringslinjerna"* (tangenterna) vid tidpunkterna t = 0, t = 10, t = 20, ... Förändringslinjen erhålls genom att vid en viss tidpunkt tänka sig konstant utströmningshastighet. Värdena införs i tabell.



f) *Att bestämma h´(t) genom att derivera aktuell andragradsfunktion* och sätta in värdena t = 0, t = 10, t = 20, ... Värdena införs i tabell (Se nästa sida).

Derivatan i olika punkter kunde bestämmas genom att hålla utströmningshastigheten konstant!! Försöket stannade alltså upp i en punkt. Där kunde vi nu mäta ”dh” genom att samla utrunnet vatten under tiden ”dt” = till exempel 10 sek.

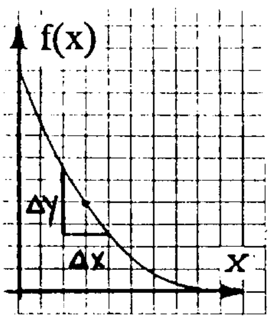
Genom att hålla tillbaka vattnet i röret kunde derivatan beräknas.

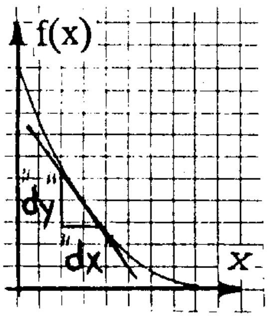


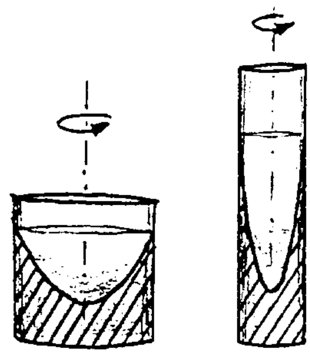
Skillnaden mellan begreppen $\Delta y/\Delta x$ och dy/dx blev påtaglig. se figur nästa sida.

Tabell

FÖRSÖK	TID:	t = 0 s	t = 10 s	t = 20 s	t = 30 s	t = 40 s	t = 50 s	t = 60 s
a)	$\frac{\Delta h}{\Delta t}$	*****						
b)	$\frac{\Delta h}{\Delta t}$	*****						
c)	$\frac{\Delta h}{\Delta t}$	*****						
d)	$\frac{dh}{dt}$							
e)	$\frac{dh}{dt}$							
f)	$h'(t)$							







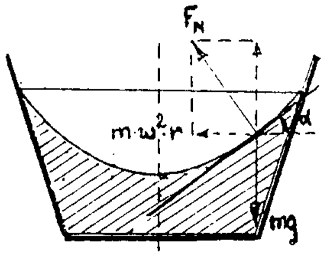
Med detta försök kunde nu också ändringskvotens förändring studeras genom att rören sättes intill varandra. Derivatans ekvation (vattennivåns förändring med avseende på tiden) kunde bestämmas och därmed funktionen för vattennivån. (f´(x) ger f(x))

Tangenten kunde utan svårighet ritas upp av eleverna och de insåg att dess lutning motsvaras av konstant utströmningshastighet.

På matematikbiennalen hade vi också med en del andra konkreta modeller såsom roterande vattenytors funktion (parabeln)för NT-elever.

Roterande vatten

Att med hjälp av vattenytans lutning (hos roterande vatten) bestämma vattenytans form (primitiv funktion), varefter rotationsfrekvensen kunde bestämmas genom mätningar på vattenytan



Vattenmängden kunde också bestämmas med hjälp av integralberäkning

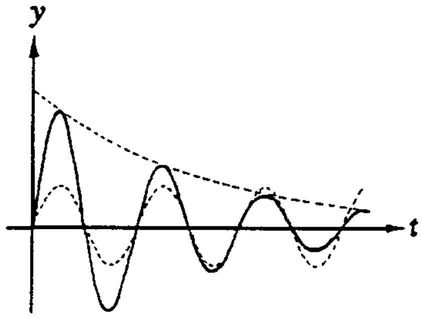
Sammansatt funktion

Att studera sammansatta funktioner,

$y = \sin(\omega t + \alpha)$ och $y = A \cdot e^{-k \cdot t}$

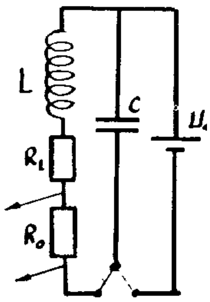
som ger

$y = A \cdot e^{-k \cdot t} \cdot \sin(\omega t + \alpha)$



Detta är funktionen för strömmen i en elektrisk svängningskrets. Denna funktion kan också bestämmas med hjälp av en differentialekvation. Vi lät eleverna rita upp kurvan och kunde sedan låta oscilloskop och skrivare verifiera elevens kurva.

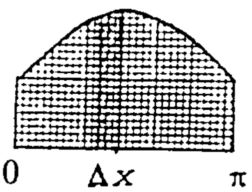
$$\boxed{\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} \cdot i = 0}$$



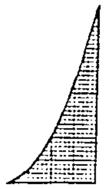
Träaktiga problem

Trämodeller, utsågade efter olika funktioner, blev beräkningsuppgifter på massa och vridande moment med hjälp av integral. Eleverna kunde verifiera sina beräkningar genom praktiska mätningar med trämodellerna.

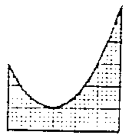
Försök 3



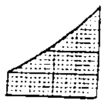
Beräkna massan hos en träkloss.
Massan = konstant·arean
Konstant = ...
Arean = summan av f(x)·Δx från vänstra till högra kanten
Massan = k· ∫f(x)·dx



$f(x) = x^2 \quad m = \int$

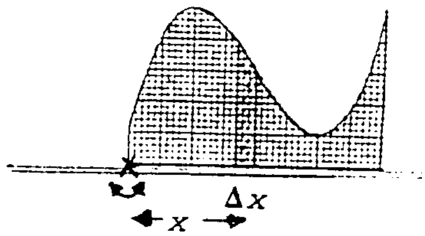


$f(x) = x^2 - 2 \cdot x + 1{,}5 \quad m = \int$

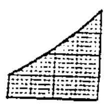


$f(x) = \frac{(x+2)^2}{8} \quad m = \int$

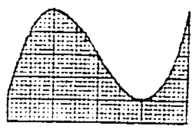
Försök 4



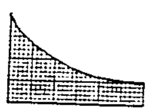
Beräkna vridande momentet orsakat av en träkloss.
Vridande momentet = Tyngden · hävarm-
Tyngd = konstant · area
Konstant, k = ... N/dm^2
Totala vridande momentet = summan av (konstant·f(x)·xΔx) från vänstra till högra kanten.
Vridande momentet M = k·∫f(x)·x·dx



$f(x) = \frac{(x+2)^2}{8} \quad M = \int$



$f(x) = \frac{2x^3 - 12x^2 + 18x + 2}{4} \quad M = \int$



$f(x) = \frac{2}{x+1} \quad M = \int$

Vi ser fram emot fler försök som kan hjälpa oss till att göra livet gladare!!!!!

För mer information kontakta:
Birger Jörgensen och Bengt Åhlander
Gymnasieskolan, Box 730
462 01 Vänersborg
tel: 0521-71864