Karin Kairavou

# Konkretisering av begrepp

Denna artikel om konkretiseringar är ett resultat av en skandinavisk samverkan. Författaren har i många år varit en av de drivande på Mattelandet i Helsingfors. Artikeln har tidigare publicerats i norska Tangenten och är här bearbetad för Nämnarens läsare.

Den kinesiske författaren och nobelpristagaren i litteratur år 2000, Gao Xingjian, använder en spännande metod i sitt arbete. Han talar in sina blivande texter på band för att kunna lyssna på dem innan han skriver ner dem. Det gör han för att texten ska uppfattas av örat och inte enbart med de verktyg vi använder när vi tänker.

Många vetenskaper har sina egna tecken för notation, sitt eget symbolspråk. De insatta kan enkelt ta del av symbolerna och förvandla dem till inre bilder. En musikaliskt bevandrad människa kan läsa noter och samtidigt höra musik inom sig. På samma sätt kan en matematiker läsa matematisk text och göra sig en bild av situationen i sitt inre.

## Ett material visar olika matematikinnehåll

För de allra flesta av våra elever behövs det någon form av konkretisering för att matematiska begrepp och regler ska bli begripliga och kunna befästas i deras verklighet. Konkretisering är ett sätt att synliggöra matematiska idéer så att många personer, olika till sin läggning och fallenhet, kan ta del av dem. När man konkretiserar stimuleras flera sinnen samtidigt och upplevelsen berör på djupet. Konkretisering sker oftast i samband med introduktion av nya begrepp och regler. *För mig är konkretisering att med hjälp av konkreta hjälpmedel vägleda eleven till förståelse av teoretiska begrepp.* Metoderna och hjälpmedlen vid konkretisering kan variera. Jag anser mig konkretisera begrepp även när jag använder mitt språk till att på olika sätt förklara nya begrepp och regler för elever.

För matematikens del kan vi genom att konkretisera få uppgifterna att stiga ut ur papperet. De svarta symbolerna på det vita papperet behövs, men konkretiseringen ger liv åt uppgifterna och hjälper eleverna att förstå teoretiska resonemang. När vi arbetar med konkret material i matematikundervisningen blir uppgifterna öppna och ger möjlighet till differentiering. Vi konkretiserar för att hjälpa elever till förståelse av teoretiska begrepp, väcka nya idéer eller för att låta dem bekräfta det de redan vet.

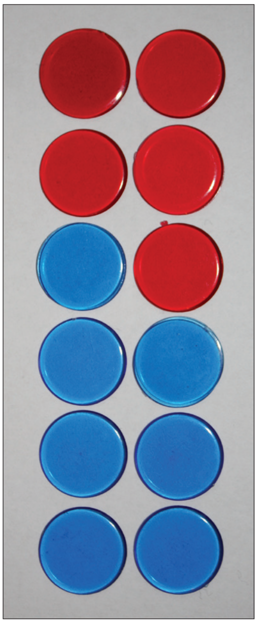
Vad fordras det av en elev för att hon ska kunna känna glädje och ha framgång i sina matematikstudier? Som gymnasielärare frapperas jag ofta av att problemen i matematik på alla stadier ser ganska lika ut. Eleverna känner sig osäkra inför räkning med bråktal, att hyfsa enkla uttryck, räkning med kvadratrötter, skillnaden mellan uttryck och ekvation, införandet av variabel och parameter samt enhetsomvandlingar.

Alla lärare vet hur viktigt det är att eleven tillägnar sig en god grund i matematikstudierna. En förutsättning för att studierna ska uppfattas som meningsfulla är att eleven med lärarens stöd får möjlighet till egen begreppsbildning. Läraren kan sedan hjälpa eleven att befästa begrepp i sin egen matematiska verklighet.

För elever i åldern 6–12 år är det naturligt att begrepp måste konkretiseras på olika sätt. Också för elever i de högre klasserna kan konkretisering öka intresset och förståelsen för matematik. Förutom klara begrepp behöver eleverna en god taluppfattning för att studierna ska löpa smidigt. Då man löser matematiska problem gäller det ofta att kunna ana sig till lösningsmodeller; man bör kunna koppla ihop olika delar av sitt kunnande på ett kreativt sätt. Ett sätt att beskriva den förmågan är att tala om en matematisk intuition. För att kunna utveckla en sådan är god taluppfattning mycket värdefull.

Talen ska gärna ha en skepnad och skilja sig från varandra för att eleverna ska kunna experimentera med dem och använda olika tankemodeller. Med små transparanta färgknappar skapar vi bilder av två udda tal och visar elegant att summan av två udda tal alltid är jämn. Med hjälp av knapparna kan man lätt och vackert konkretisera eller visualisera ett antal matematiska regler och sanningar. Uppgifterna nedan är goda exempel på det. Elevernas abstraktionsförmåga utvecklas i ”egen takt” vilket betyder att det i ett och samma klassrum oftast finns elever med olika förmåga till abstraktion. Med varierande undervisningsmetoder och med stöd av konkretisering kan man ge alla elever chanser till inlärning. Såväl hög- som lågpresterande elever gynnas av att använda olika kanaler för inlärning.

## *Jämna och udda tal*



Bilden av ett jämnt tal upplever eleverna som naturlig. Vi kan dela knapparna rättvist mellan två personer och två lika höga staplar kan bildas. På matematikens exakta symbolspråk skriver vi $2 \cdot n$ där $n \in N$, de naturliga talens mängd. Ett udda tal däremot går inte att dela jämnt med två. Då vi arbetar abstrakt och endast använder symbolspråk betecknar vi ett udda tal $2n-1$ eller $2n+1$ där $n$ tillhör de hela talens mängd. När vi konkretiserar udda tal använder vi oss av formen $2n+1$, där $n$ är ett naturligt tal. Då vi använder konkretisering som hjälpmedel är det lämpligt att jobba endast i talmängden $N$.

Nu kommer vi till den egentliga uppgiften.
Om eleven har bekantat sig med udda tal och deras ”konkreta” framställning är det enkelt att bevisa satsen ovan:

> Bevisa att summan av två udda tal alltid är ett jämnt tal.

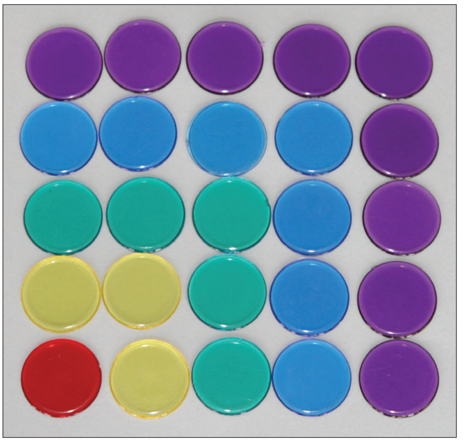
$$(2n+1)+(2m+1)=2n+2m+2=2(n+m+1)$$

där $(n+m+1)$ utgör ett positivt heltal. Alltså är summan av två udda tal alltid ett jämnt tal.

Beviset ovan är inte speciellt svårt för en elev att lära sig om läraren visar bevisföringen med symboler. Om eleven istället har laborerat med talens egenskaper och visuella utseende är det sannolikt att hon kan komma på beviset utan handledning av läraren.

## *Summera udda tal*

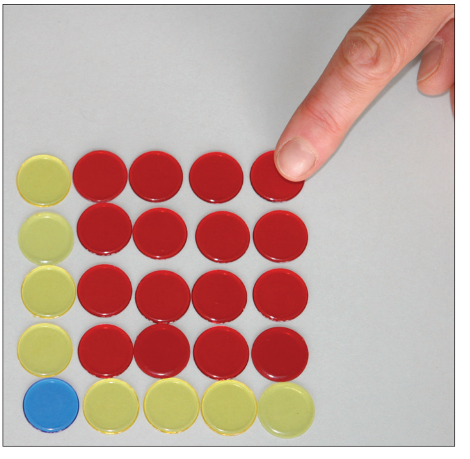
Visa att $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \ldots + (2n - 1) = n^2$



Summan av på varandra följande udda tal, med början från 1, blir alltid ett kvadrattal. Att konstatera faktum genom att summera talen kan vara en upplevelse i sig. Eleverna kan konstatera samma sak genom att forma udda tal med färgknappar och sedan foga ihop en bild, där de börjar med den triviala ettan och därefter omgärdar den ensamma knappen med knappar i andra färger, formade som bilder av talen 3, 5, 7, 9, ... Resultatet är förbluffande i början, men medan eleverna bygger den allt större kvadraten inser de att regeln är allmängiltig.

## *Kvadreringsregeln*

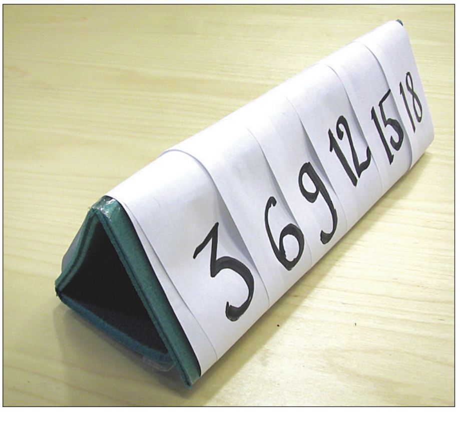
Visa att kvadreringsregeln $(n + 1)^2 = n^2 + 2n + 1$



Eleverna konfronteras med kvadreringsregeln på högstadiet och den upplevs som svår av många elever. Här hjälper det med konkretisering. Eleverna märker själva att den ”dubbla produkten” motsvaras av de gula knapparna på bilden. Förståelsen ökar och via den vägen blir regeln också begriplig. Vi kan använda färgkoder och tala om de röda knapparna som motsvarar $n^2$, de gula kommer från $2n$ och till sist den ensamma blåa knappen som representerar ettan.

## *Delbarhet*

Bevisa att $(n^3 - n)$ är delbart med 6 då $n \geq 2$.




Detta är en uppgift som kräver god taluppfattning. Den förekom i studentexamensprovet i matematik hösten 2007 i Finland. Jag minns att jag har gett samma uppgift till mina elever i årskurs ett på gymnasiet för ett antal år sedan. De klarade att hyfsa uttrycket till $n(n-1)(n+1)$. Därefter var det stopp. Eleverna hade svårigheter med att dra slutsatser av resultatet. De saknade *erfarenheten* att vart tredje tal är delbart med 3. Den upplevelsen kan vi ge dem redan i tidig ålder. En talremsa rullas runt en Tobleroneask som på bilden och saken är klar.

## Ett matematikinnehåll synliggörs med olika material

I exemplen ovan har vi utgått från ett konkretiseringsmaterial, i detta fall de små färggranna och transparenta knapparna, och samlat begrepp och regler som låter sig konkretiseras med hjälp av dem. Nu vänder vi på steken och undersöker hur *kvadratrotsbegreppet* kan göras synligt med hjälp av olika konkretiseringsmaterial.

### *Färgknappar*

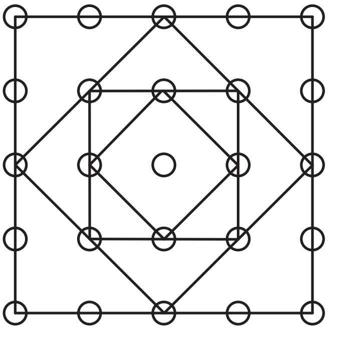
Rada upp knappar i formationer som är lika breda som de är höga. Vi kallar antalet knappar i formationerna för kvadrattal.

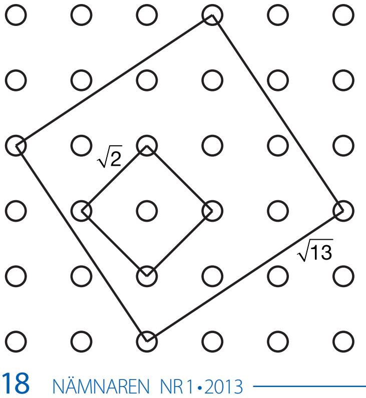
Vi låter färgknapparna fungera som en bro och eleverna startar med dem. Läraren gör därefter en tabell med en kolumn för det totala antalet knappar i formationen och en annan kolumn för antalet knappar på en sida. På så sätt får eleverna i ett tidigt skede en uppfattning om kvadratrotens uppgift. Det kan vara spännande att utforska vilka antal knappar som låter sig formas till kvadrater. Än så länge får eleverna nöja sig med att kvadratrotens värde är ett heltal. En fundersam elev kan leva i tron att kvadratroten ur 17 inte existerar. I heltalens värld är allt ännu enkelt.

### *Geobräde*

Nu utökar vi mängden av tal som konkretiseras. Vi tar också med de irrationella talen och byter konkretiseringsmaterial från knappar till geobräde. Om det inte finns geobräden i skolan kan man använda prickpapper. Uppgiften till eleverna lyder:

Märk ut en kvadrat med arean 16 rutor på geobrädet. Markera inne i den förra kvadraten en ny kvadrat, vars area är hälften av den förra kvadratens area. Fortsätt på samma sätt ytterligare två gånger. Gör därefter en tabell lik den ovan. Ena kolumnen ger kvadraternas area och den andra ger längden av sidorna.






Denna övning kan utvecklas och ger läraren möjlighet till individualisering. Efter att Pythagoras sats blivit känd för eleverna kan de fritt laborera vidare och visa kvadrater på geobrädet med areorna 2, 5, 13, 17, …

## *Små kuber*

En följdfråga kan vara varför $\sqrt{3}$ inte går att visa på geobrädet. Jag har fortsatt uppgiften med äldre elever genom att vi byggt rätblock med hjälp av små kuber med sidlängden 1 cm. Längden av rymddiagonalen i den lilla kuben kan då få representera $\sqrt{3}$. Vi kan visa $\sqrt{14}$ med hjälp av ett rätblock med dimensionerna $1 \times 2 \times 3$ cm.

## *Tangram*

I ett tangram vimlar det av kvadratrötter. Vi bestämmer att arean av den enda parallellogrammen i pusslet är 1. Därefter kan vi be eleverna beräkna arean samt sidornas längder för alla de andra delarna.

De kan också bygga en serie kvadrater med hjälp av bitarna, där varje kvadrats area är hälften av den föregående kvadratens area. En intressant uppgift får vi om vi ber dem lägga fyra kvadrater sida vid sida, så som bilden visar, och därefter lägga en linje genom alla fyra kvadraternas övre högra hörn. Det finns säkert elever som gärna försöker sig på att bevisa det som ser ut att stämma i bilden, d v s att linjen verkligen går genom alla kvadraters övre högra hörnpunkt.

Vill vi ge den intresserade eleven en spännande utflykt kan vi fortsätta uppgiften också efter att tangrambitarna tagit slut. Vi halverar kvadraternas areor i all oändlighet och beräknar summan av alla kvadraters sidor. Det intressanta är att alla dessa halverade kvadrater ryms på såväl en finländsk som på en norsk eller svensk elevs arbetsbord.

LITTERATUR

Rystedt, E. & Trygg, L. (2005). *Matematikverkstad: en handledning för att bygga, använda och utveckla matematikverkstäder.* NCM, Göteborgs universitet.

Karin Kairavuo visar i ett antal filmer exempel på hur man kan arbeta med konkret material inom matematik. Dessa filmer finns att hämta via länk på Nämnaren på nätet.