Peter Fredrikson & Rimma Nyman

Garagebyggen

Matematisk progression i mönsterproblem

Författarna presenterar en serie uppgifter om växande mönster som bygger på varandra och som erbjuder rika lärandemöjligheter i matematik på låg- och mellanstadiet. Eleverna får undersöka tre olika typer av garagelängor och diskutera likheter och skillnader mellan dem.

Funderingar kring mönster är något som barn ägnar sig åt redan i förskoleåldern när de möter regelbundenhet och upprepningar. Att beskriva den upprepande delen i ett mönster brukar sällan vara någon större utmaning för elever i förskoleklass och åk 1. I de lägre åldrarna förekommer ofta mönsteruppgifter där en viss mönsterdel ska upprepas, till exempel röd, grön, blå; röd, grön, blå; osv. Till skillnad från dessa upprepande mönster har ett så kallat växande mönster en mer dynamisk karaktär genom att mönsterdelen förändras på ett strukturerat och systematiskt sätt. Relativt lite uppmärksamhet ges åt växande mönster som kan bana väg för ett algebraiskt tänkande.

Vissa mönster har en konstant differens mellan varje figurpar och kan därför ligga till grund för att skapa en *aritmetisk talföljd* såsom 0, 2, 4, 6, 8, ... I mer komplexa växande mönster kan även förändringen variera och skapa talföljder såsom 1, 3, 6, 10, 15, ...

Mönster är ett spännande matematiskt innehåll som engagerar elever i alla åldrar. Genom att arbeta praktiskt, laborera, få upptäcka och resonera kring skillnader och likheter, både mellan upprepande mönster och olika typer av växande mönster, förbereds eleverna för att senare kunna använda symbolspråk och att kunna generalisera. Det finns forskning som stödjer idén om att matematiska strukturer och samband är centrala för att yngre elever ska förstå algebra. Därför är det viktigt att hitta fruktbara sätt att tidigt arbeta med strukturer, till exempel genom mönsteruppgifter. Att undervisa med och om växande mönster på ett systematiskt sätt kräver förståelse för begreppet matematisk progression, vilket handlar om att det matematiska innehållet vidgas och fördjupas och blir allt mer avancerat. En sekvens av uppgifter som bygger på en tänkt matematisk progression innehåller uppgifter där:

1. det finns en relation mellan alla uppgifter
2. svårighetsgraden ökar för varje ny uppgift så att eleven får utmana sina tidigare föreställningar.

Här beskriver vi ett lektionsupplägg kring ett exempel där Carl, Clara och Kalle bygger garagelängor. Den matematiska progressionen är strukturerad och kan synliggöras utifrån mönstrens algebraiska uttryck. Carls växande mönster tolkas som det algebraiska uttrycket $2n$, progressionen går vidare till Claras mönster $2n + 1$ och slutligen till $2n - 1$ som uttrycker Kalles mönster.

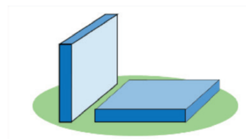
Ett problem – ett eller flera lärandemål

Vi beskriver nu en serie uppgifter som lämpar sig för en eller flera lektioner i följd. Uppgifterna lyfter centrala matematiska idéer som hjälper eleverna mot ett allt mer algebraiskt tänkande och de kan anpassas till olika årskurser. Ett lärandemål kan vara avgränsat till en lektion eller en specifik aktivitet och vara formulerat med fokus på *vad* eleven ska lära sig utan att precisera *hur* undervisning ska genomföras eller *varför*. Lärandemål ska vara innehållsligt preciserade för att vara mätbara samt förankrade i kursplanens centrala innehåll. Undervisningen tar sin utgångspunkt i ett garageproblem som beskrivs nedan och har tre lärandemål, där tanken är att eleven ska:

1. kunna upptäcka en konstant ökning eller minskning i en aritmetisk talföljd
2. förstå att när differensen mellan två figurer i ett växande mönster är konstant kan förändringen antingen beskrivas som upprepad addition eller som en multiplikation
3. kunna tolka växande mönster och formulera ett algebraiskt uttryck med hjälp av begreppen *byggelement*, *förändring* och *gemensamma delar.*

Garageproblemet

I garageproblemet får eleverna möta tre olika uppgifter med tydlig matematisk progression. Eleverna introduceras stegvis till de olika mönstren utifrån en kontext där tre personer, Carl, Clara och Kalle, har byggt garagelängor. Med hjälp av konkreta byggplattor återskapar eleverna garagebyggena och försöker lista ut hur många byggplattor som behövs för ett visst antal bilar. Aktiviteten abstraheras sedan så att eleverna kan betrakta garagebyggena som mönster där det antal bilar som ryms i en garagelänga får utgöra figurens nummer.



Byggplattor

Illustrationen visar att i den garagelänga som benämns som figur 2 finns det två garage (och två bilar).

Det mest uppenbara för elever som möter växande mönster är den givna förändringen från en figur till nästkommande figur, i det här fallet hur antalet byggplattor förändras. I ett växande mönster där förändringen är konstant är förändringen relativt lätt att upptäcka. Men att bara uttrycka antalet byggplattor i nästa figur i mönstret leder inte automatiskt till algebraiskt tänkande. Eleverna behöver ges möjlighet att resonera kring hur varje garagelänga är konstruerad och hur den går att dela upp i ett antal garage, där varje garage i sin tur består av ett antal byggplattor. För att komma ifrån att eleverna endast räknar antalet byggplattor behöver de utmanas med frågor som öppnar upp för högre tal: *Hur många byggplattor behövs till en garagelänga för 50 bilar? Hur ser figur 100 ut?*

Carls garagebygge

I garagebygget består varje figur av ett antal garage. Målet är att eleverna upptäcker dels den konstanta förändringen mellan olika figurer, dels hur garagen är relaterade till denna förändring, dvs att en given figur består av ett antal garage. Dessa underliggande strukturer är inte självklara för alla elever.

När eleverna fått bygga och fundera en stund kan diskussionen ta sin utgångspunkt i en given figur, exempelvis figur 3. För varje figur adderas två byggplattor. I figur 3 finns tre garage som vart och ett konstrueras med hjälp av två byggplattor. Vi definierar dessa båda byggplattor tillsammans som ett byggelement. Genom resonemang om vad byggelementet kan vara, illustrationer av det och hur olika figurer består av dem, kan eleverna komma vidare mot ett algebraiskt tänkande.

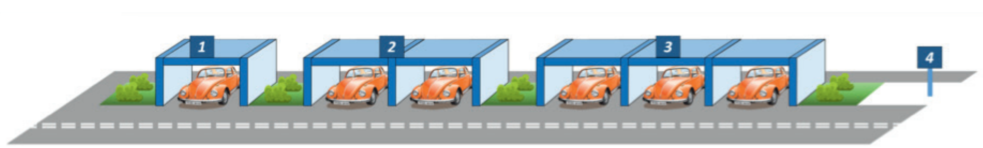
Carls byggelement med två byggplattor

Eleverna skriver ned hur antalet byggplattor kan uttryckas numeriskt. Det är vanligt att elever använder sig av den additiva strukturen, men de behöver också få syn på den multiplikativa strukturen för att kunna formulera ett algebraiskt uttryck. Här kan läraren visa på enkelheten i att uttrycka upprepad addition ($2; 2+2; 2+2+2; \ldots$) som multiplikation ($1 \cdot 2; 2 \cdot 2; 3 \cdot 2; \ldots$).

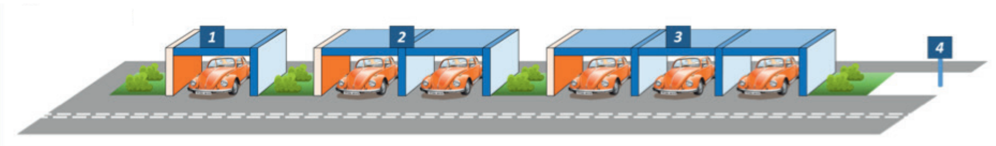
Kopplingen mellan antalet bilar, figurens ordningstal och det totala antalet byggelement som behövs är något eleverna kan komma fram till genom lärarens frågor. *Har ni upptäckt att varje garagelänga har ett nummer, ett figurnummer? Finns det något gemensamt mellan garagelängans nummer och de antal byggelement som ingår? Vad?*

När eleverna förstått att en figur byggs upp av ett antal byggelement och att dessa är sammankopplade med figurnumret kan eleverna uttrycka antalet byggplattor i Carls garagelänga som addition av 2 lika många gånger som figurens nummer, eller som multiplikation av figurens nummer med 2. Om n står för en godtycklig figur i mönstret och 2 för antalet byggplattor i ett byggelement kan därför hela mönstret uttryckas som $n \cdot 2$. I de senare årskurserna kan konventionen att alltid skriva konstanten först och utelämna multiplikationstecknet införas så att $n \cdot 2$ skrivs som $2n$, men i början är det lättare om det algebraiskt uttrycket skrivs på samma sätt som det aritmetiska.

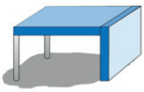
Claras garagebygge



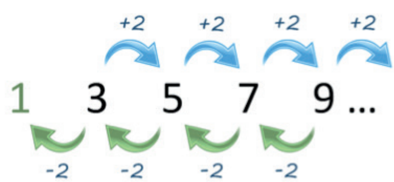
I nästa uppgift får eleverna möta Claras garagebygge. Efter en del byggande, ritande och funderande kan klassen diskutera vad som är lika och vad som skiljer Carls och Claras mönster åt. Båda förändras på samma sätt, det vill säga med en ökning av två byggplattor från en figur till nästa. Frågor som utmanar eleverna att tänka vidare kan vara: *Hur ser byggelementen ut i Claras garagelänga? Vad är det som skiljer jämfört med Carls garagelänga? Varför kan vi inte uttrycka Claras garagelänga som $n \cdot 2$ om förändringen är densamma? Vad betyder tvåan i uttrycket $n \cdot 2$?*



En strategi som elever ibland använder sig av är att de utgår från figur 1 och uppfattar denna figur som en helhet. Denna helhet ses då som den gemensamma delen och den ingår i nästkommande figurer. I detta mönster innebär det en svårighet eftersom garagen är hopbyggda så att det behövs tre plattor till första garaget men bara två för att öka med ett garage. Genom att färglägga de oförändrade byggdelarna i varje figur (här vit/orange vägg) kan det visuella mönstret synliggöra likheten mellan Carls och Claras garagelängor. Båda mönstrens byggelement består av två byggplattor (de blå). Skillnaden är alltså att det finns en extra byggplatta i Claras mönster som inte förändras. Den utgör en gemensam del i alla figurer.



Claras byggelement med två byggplattor

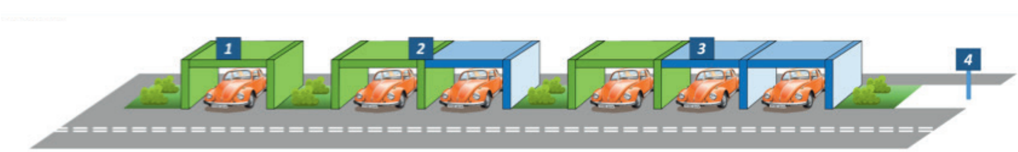


Många uppgifter och problem om mönster och talföljder som elever möter uppmanar eleven att fortsätta mönstret åt höger. Det går därför att utmana eleverna genom att ställa frågor om hur mönstret skulle se ut om det istället fortsatte åt vänster, eller genom att fråga hur en tänkt figur 0 skulle kunna se ut. Figur 0 visualiserar den oförändrade delen som är gemensam i alla figurer. Mönstrets förändring åt vänster innebär en subtraktion med 2, så för att komma på figur 0 behöver vi subtrahera 2 från startvärdet. Dessa diskussioner leder in på skillnaden mellan de algebraiska uttrycken $n \cdot 2$ och $(n \cdot 2) + 1$. Eller utryckt på ett mer kompakt sätt: skillnaden mellan uttrycken $2n$ och $2n + 1$.

Det är inte ovanligt att elever uppfattar startelementet i Claras garagelänga som tre byggplattor (här gröna). Om de börjar med tre plattor, som i figuren nedan, blir uttrycket istället $3 + 2(n - 1)$ och inte $1 + 2n$. Men i slutändan blir antal byggplattor ändå lika, eftersom uttrycken är ekvivalenta:

$$3 + 2 \cdot (n - 1) = 3 + 2 \cdot n + 2 \cdot (-1) = 3 + 2n - 2 = 1 + 2n = 2n + 1$$

Läraren kan fråga eleverna om de kan upptäcka ett byggelement även i den första figuren. Den första enheten på tre byggplattor kan då delas upp i ett byggelement plus en platta, $2 + 1$.



Använd en tabell

En tabell är en matematisk representationsform som gynnar problemlösning. När det gäller Claras garagelänga med utgångspunkt i tre gemensamma delar är det särskilt fördelaktigt att bokföra sina tankar i tabellform. Här behöver eleverna inte tänka på figur 0, utan de kan börja direkt med den gemensamma delen som de ser, 3. Vi har skrivit uträkningar i tabellen, för att kunna följa vad som händer steg för steg och synliggöra sambandet mellan figurnummer (*n*) och det totala antalet byggplattor.

Figurnummer	1	2	3	*n*
Gemensamma delar	3	3	3	3
Antal byggelement	0·2	1·2	2·2	(n-1) · 2
Totala antalet byggplattor:	3 + 0·2	3 + 1·2	3 + 2·2	3 + (n-1) · 2

Kalles garagebygge

Utifrån tidigare resonemang kring figur 0 får eleverna undersöka Kalles garagebygge. Här finns inga gemensamma delar att upptäcka. För att få figur 0 skulle vi behöva subtrahera ett byggelement (som består av två plattor) från figur 1. Men eftersom figur 1 bara består av en byggplatta så går det inte att subtrahera två – det fattas en byggplatta. Det algebraiska uttrycket formuleras som $2n - 1$.

Den viktiga avslutningen

För att förstå begreppet mönster på djupet behöver låg- och mellanstadieelever ges möjlighet att arbeta praktiskt. Då kan de upptäcka skillnader mellan upprepande och växande mönster och skapa insikter som kan föras fram i en gemensam diskussion.

En av de viktigaste delarna i ett undersökande arbetssätt är att avsätta tid i slutet av lektionen för diskussion och reflektion. Det är lärarens ansvar att se till att varje elev får goda möjligheter att nå uppsatta lärandemål och det är i det avslutande skedet som lärandet kan synliggöras, befästas och sammanfattas.

Sammanfatta de tre mönstren som alla bygger på samma förändring och med liknande byggelement. Carls garagelänga har inga gemensamma byggplattor. I Claras garagelänga är en byggplatta gemensam vilket ger oss det algebraiska uttrycket $2n + 1$. Kalles garagelänga saknar en byggplatta och det kan beskrivas med uttrycket $2n - 1$.

Översätt mönstren till talföljder för att synliggöra värdet av att bestämma figur 0. Eftersom aritmetiska talföljder definieras som en konstant differens mellan varje figurpar erhålles figur 0 genom att den konstanta differensen, i det här fallet 2, subtraheras från starttalet.

Carls garage: …, **0**, 2, 4, 6
Claras garage: …, **1**, 3, 5, 7
Kalles garage: …, **-1**, 1, 3, 5, 7

Under diskussionen kan du som lärare tillsammans med eleverna lyfta likheter och skillnader utifrån de olika mönstren, fånga upp elevernas sökande efter regelbundenheter och försök till att avgöra rätt antal för nästa figur. Diskutera hur en figur är konstruerad för att synliggöra byggelement och samtala om olika sätt att hitta de gemensamma delarna. Hitta startvärdet genom att skriva om bilden till en talföljd och utmana eleverna med att fråga om det funna sättet alltid funkar. Testa det nyfunna sättet gemensamt i klassen genom ett nytt exempel och lyft fram metoden i lektionens sammanfattning.

LITTERATUR

Berglund, L. (2009). *Tal och mönster.* Stockholm: Studentlitteratur.

Kerekes, K. (2014). *Undervisning om växande mönster: En variationsteoretisk studie om hur lärare behandlar ett matematiskt innehåll på mellanstadiet.* Licentiatavhandling, Linköpings universitet.

Kilhamn, C. & Ekdahl, A-L. (2014). *Aritmetiska talföljder.* Skolverket: Lärportalen. Modul: Algebra åk 4–6.

Kilhamn, C. & Olteanu, L. (2014). *Aritmetiska talföljder (forts).* Skolverket: Lärportalen. Modul: Algebra åk 4–6.

Oltenau, C. (2014). *Interaktion i algebraklassrummet.* Skolverket: Lärportalen. Modul: Algebra åk 1–3 del 4.