Norio Torimoto

Gyllene snittet med origami

Med endast några få vikningar kan man få fram gyllene snittet och också konstruera en regelbunden femhörning. I Nämnaren nr 2, 2002 beskrev författaren hur man kan arbeta med hjälp av A4-formatet.

Kan det vara möjligt att med endast tre vikningar av ett kvadratiskt papper få fram gyllene snittets proportioner, utan att använda något verktyg, inte ens en penna?

Gyllene snittet är en mycket intressant proportion. Inte bara matematiker är intresserade av det gyllene snittet utan också konstnärer och filosofer m fl.

Dess förhållande är så magnifika och därför har den fått en så briljant benämning. Man kan se det gyllene snittet på många ställen i naturen och i konstformer från alla jordens hörn. När människor letar efter vackra proportioner, då hittar man det gyllene snittet. Det är en av de finaste proportioner som fötts av naturen.

Norio Torimoto är Origami Master vid Nippon Origami Association och bosatt i Sverige sedan 1971

Gyllene snittet kan definieras i bred mening. Jag tar här bara upp en definition av Euklides. När man delar en given sträcka, skall förhållandet mellan den större delen och den mindre delen vara samma som förhållandet mellan hela sträckan och den större delen.

Hela sträckan

Långa delen Korta delen

Långa : Korta = Hela (långa + korta) : Långa

Den här proportionen är inte alls svår eftersom den är ”tillverkad” av naturen. Naturen gör inte svåra saker. Tvärtom, naturen gör det enklast möjliga. Bara människan krånglar till det. Det gäller också irrationella tal ($\sqrt{2}$) som används för att beskriva A4-formatet, som jag beskrev i den förra artikeln.

Man kan skrämma folk och ge intryck av att gyllene snittet är svårt. Här är några exempel på hur man kan uttrycka det gyllene snittet så att det kan skrämma folk.

Det gyllene snittet uttryckt som ett tal kan betecknas med den grekiska bokstaven φ och är då det numeriska värdet av kvoten ovan. Denna kvot kan skrivas

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

eller

$$\varphi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \dots}}}}$$

Varför får man intrycket av att gyllene snittet är svårt? Därför att det uttrycks med tal. Siffror kan vara mycket bra verktyg för att studera eller bevisa matematiska samband, men de har sin begränsning. Siffrorna är tillverkade av människan. Låt oss för en stund glömma verktyget siffror och ta fram ett annat verktyg, bilden eller det geometriska verktyget. Då blir plötsligt det gyllene snittet så enkelt. Det är som trolleri ....

Vi börjar med det vanliga A4-formatet i bild 1. Där är förhållandet mellan sidorna $1:\sqrt{2}$, vilket beskrevs i artikeln i Nämnaren nr 2 (Torimoto, 2002).

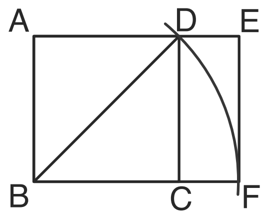

Bild 1. ABCD är en kvadrat.
ABFE är A4-formatet. BD = BF.

Formatet i bild 2 har ett förhållande mellan den korta och den långa sidan som är just det gyllene snittet.

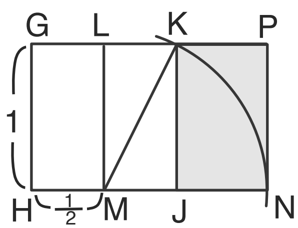

Bild 2. GHJK är en kvadrat.
LM delar kvadraten mitt itu. MK = MN.

De två formerna har mycket lika egenskaper, eller hur? Det går att hitta fler likheter. Om vi halverar A4-formatet får vi A5. Dessa båda format är likformiga. Detta gäller för alla A-formaten, de har samma proportioner. Se på rektangeln i bild 2 vars sidor har det gyllene snittets proportion. Här har vi att rektanglarna GHNP och KJNP är likformiga och alltså har samma proportioner.

Gyllene snittet är inte svårt när man ser det som bild. Eftersom man ser A4-format varje dag känner man att den formen är nära. På samma sätt känner man att gyllene snittet inte är svårt därför att det finns gemenskap med A4-formatet.

Vi ska studera gyllene snittet lite till. Jag bearbetar bild 2 lite mer och får figuren i bild 3.

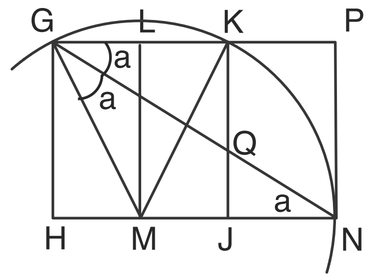

Bild 3.

Nu ska du titta på punkt Q. Det är den magiska punkten och du kan aldrig glömma den ...

Punkt Q delar sträckan KJ som gyllene snittet. Alltså är KQ den långa sträckan och KJ är hela sträckan (långa + korta). Varför blir det så? Det kan du fundera på själv. Du kan kontakta mig om du inte kan reda ut varför.

I figuren i bild 3 har vi att (∠ betyder vinkel)

∠ PGN = ∠ GNM därför att GP och HN är parallella,

∠ GNM = ∠ MGN därför att triangeln MNG är liksidig, vilket ger att

∠ PGN = ∠ MGN.

Jag tar bort lite från bild 3 och får bild 4.

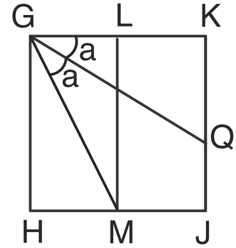

Bild 4.

Vika ett kvadratiskt papper

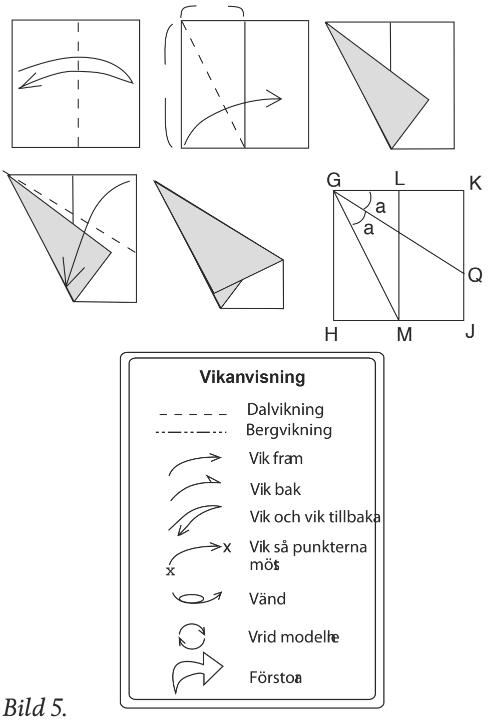

Bild 5.

Det finns sex bilder men det är bara tre vikningar. Den sista bilden visar de viklinjer som är resultatet. Dessa är precis desamma som i bild 4 och vi har således funnit punkten Q som delar kvadratens sida i gyllene snittets proportioner. KQ är den långa sträckan. QJ är den korta sträckan och KJ är hela sträckan och vi har att

$$\frac{KQ}{QJ} = \frac{KJ}{KQ}$$

(eller hellre KQ : QJ = KJ : KQ)

Vad som är svårt eller enkelt är oklart. Är svåra saker verkligen svåra? Att ta fram gyllene snittet med origami är inte alls svårt, eller hur? Man viker ett kvadratiskt papper bara tre gånger utan att använda något verktyg, inte ens en penna.

Man undervisar inte mycket om gyllense snittet i skolan, varken i Japan eller i Sverige. Jag tycker att om man undervisar på ett bra sätt så kan det passa redan på högstadiet. Det är inte alls svårt utan mycket roligt och gör att matematiken blir intressant.

Nu ska vi ta fram en liksidig femhörning med hjälp av det gyllene snittets proportion. Vi behöver inte använda några verktyg utan ska bara vika papper.

Skapa en liksidig femhörning

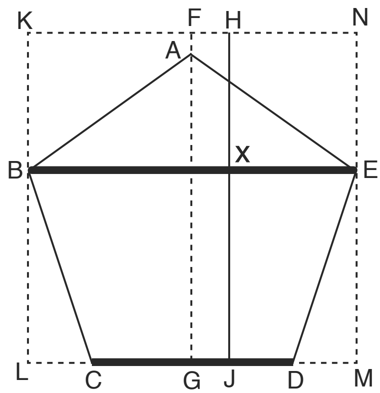

Bild 6.

Förhållandet mellan diagonaler och sidor i en liksidig femhörning är precis det gyllene snittet.

Långa sträckan = BX = LJ = CD

Korta sträckan = XE = JM

Hela sträckan (långa + korta) = kvadratens sida = BE = LM

Vad är det vi vet?

1. Ett av femhörningens hörn, A, finns på det kvadratiska papprets mittlinje, FG.
2. Samtliga hörn utom A finns på det kvadratiska papprets sidor.
3. En liksidig femhörning har följande egenskaper.

   Den är symmetrisk

   Alla sidor är lika långa

   Förhållandet mellan diagonaler och sidor i en liksidig femhörning är precis det gyllene snittet.

Nu fortsätter vi med det kvadratiska pappret i bild 5 där vi konstruerat gyllene snittets proportioner längs ena sidan. Börja med att vända och vrida pappret.

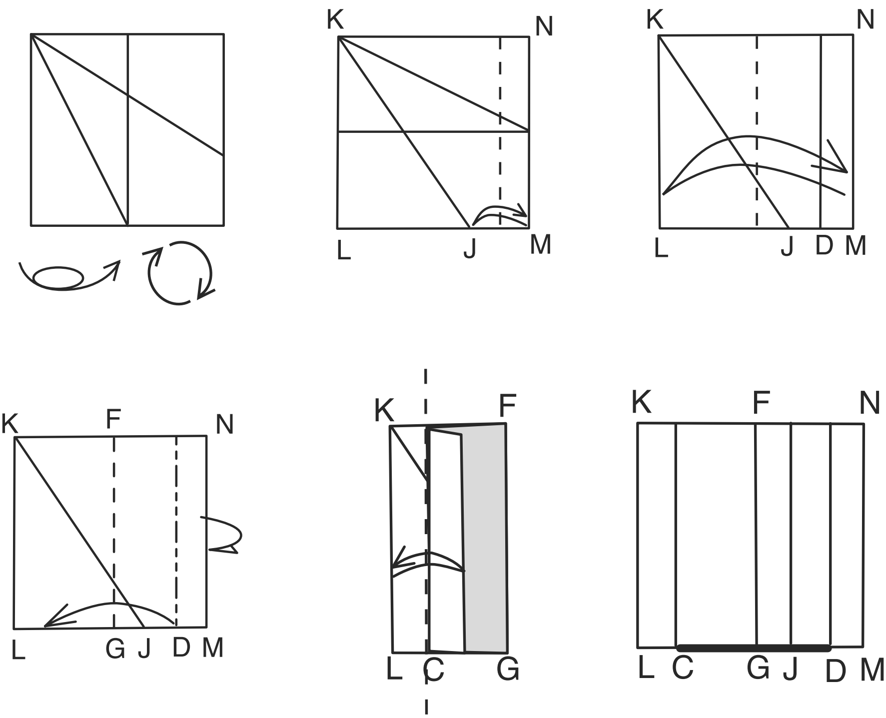

Bild 7.

Hörnet K är samma som tidigare i bild 5.

1. Börja med att vika sidan NM så att hörnet M träffar J. Vik tillbaka. Då får vi viklinjen vid punkten D.
2. Vik sedan sidan NM, så att M träffar L och N träffar K. Vik tllbaka. Viklinjen FG delar kvadraten mitt itu.
3. Vik en gång till längs FG och vik tillbaka båda papperslagren vid D. Då får vi punkten C och där LC är lika lång som MD. **Sträckan CD är en av femhörningens sidor.**

   Vad har vi gjort? Jo, vi har förflyttat den långa sidan i gyllene snittet, LJ, till mitten av sidan LM. Nu fortsätter vi med de andra sidorna i femhörningen. Vi börjar med sidan BC. Se bild 8 nästa sida.
4. Vik pappret vid C så att D träffar sidan LK, där är punkten B. Vik längs DC så att vi får viklinjen BC. Nu har vi att BC är lika lång som DC och när vi öppnar vikningarna har vi BC som den andra sidan i femhörningen.
5. Gör likadant på andra sidan. Då hittar vi punkten E och tredje sidan, DE, i femhörningen.

   Nu återstår endast att hitta punkten A. Eftersom femghörningen är symmetrisk så finns A på kvadratens mittlinje, FG.
6. Fortsätt med att vika in pappret längs BC och DE. Genom att vika upp C på B och D på mittlinjen FG hittar vi punkten A och då får vi en femhörningen genaom vika in återsående delar av kvadraten.

Nu är det färdigt!

LITTERATUR

Torimoto, N. (2002). Origami. *Nämnaren 29* (2), 34-35.

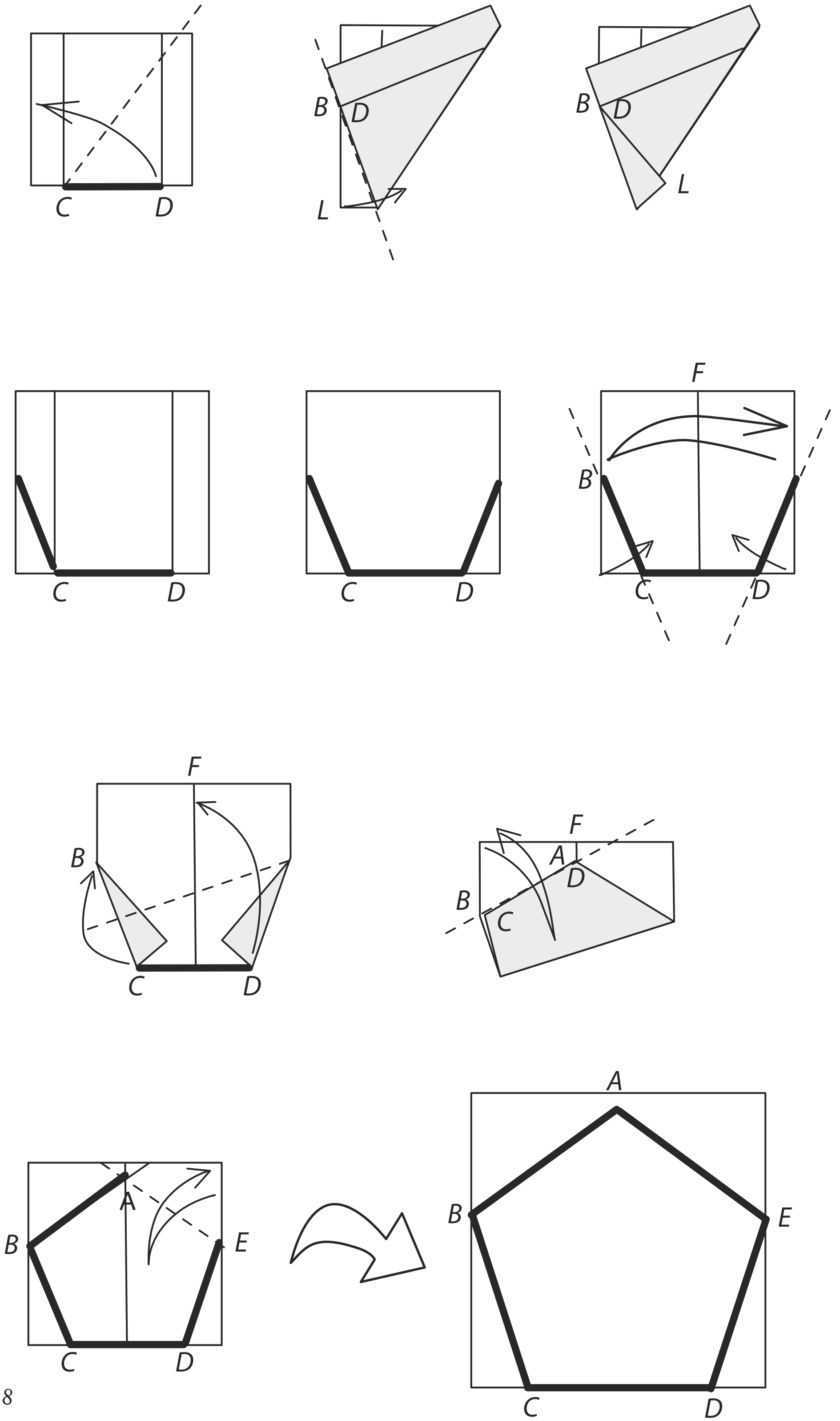

Bild 8