David Taub

Den dolda ettan

Den matematiska notationen och det sätt som elever förväntas skriva på är konventioner som kan ställa till problem. En sådan konvention är att inte skriva ut en etta på vissa ställen. Författaren presenterar några dolda ettor och motiverar varför dessa bör synliggöras.

Dolda symboler är ett välkänt men ofta negligerat problem i matematikundervisningen. En vanlig dold symbol är den osynliga ettan. Ta som exempel det enkla algebrauttrycket x som egentligen betyder $1 \cdot x$. Man blir så van vid det, att det är lätt att glömma att det inte är uppenbart för den som inte tidigare arbetat med algebra. Det finns oerhört mycket ”grammatik” i matematiken som vi lärare ofta tar för given. Det är lätt att utgå från att vissa saker är underförstådda och därför glömmer vi att lyfta fram och synliggöra viktiga idéer för eleverna.

En stor del av matematiken kan beskrivas som *skrivkonventioner* – konventioner som i grund och botten är godtyckliga, även om syftet är att underlätta och effektivisera kommunikation inom matematik. Det kan jämföras med vanligt förekommande förkortningar såsom BNP, OECD och KPI. De är inte så lätta att avkoda om man inte vet vad de står för.

Jag försöker vara aktivt medveten om problemen med dolda symboler. Nyligen upptäckte jag en typ av dold symbol som var ny för mig och som har inneburit en positiv skillnad i hur jag förklarar varför $a^0 = 1$.

Ettan i potenslagar

Hur många av er känner inte igen följande samtal?

Elev	*3^2 betyder två treor, då är 3^2 lika med nio.*
Lärare	*Bra. Och 3^0 då?*
Elev	*Det är noll treor. Då måste 3^0 vara noll.*

Jag skulle gissa att detta är ett återkommande problem. Tidigare motiverade jag noll som en potens (och även negativa potenser) med att visa följande mönster:

$$3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$$
$$3^2 = 3 \cdot 3 = 9$$
$$3^1 = 3 = 3$$

Om man minskar potensen med 1 så divideras värdet med basen 3 (det är viktigt att poängtera att det inte är alltid just 3). Mönstret fortsätter och då är det inte så svårt att motivera $3^0 = 1$, därför att $3/3 = 1$.

$$3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$$
$$3^2 = 3 \cdot 3 = 9 = 27/3$$
$$3^1 = 3 = 3 = 9/3$$
$$3^0 = 1 = 1 = 3/3$$

Man kan också tillämpa samma mönster på negativa potenser. Det har dock visat sig att även om eleverna hänger med i resonemanget kring mönstret ovan, har de svårt att acceptera och komma ihåg att svaret inte är noll då man har noll treor. Nu kommer den osynliga ettan till undsättande!

$3^3 = 1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$	en etta följd av tre treor
$3^2 = 1 \cdot 3 \cdot 3 = 9$	en etta följd av två treor
$3^1 = 1 \cdot 3 = 3$	en etta följd av en trea
$3^0 = 1 = 1$	en etta som inte är följd av någon trea

Det uppstod ett tydligt "aha" bland mina elever när jag gav denna förklaring.

Andra exempel på dolda ettor

Det finns även andra exempel där det kan vara till hjälp att synliggöra den osynliga ettan. Ett välkänt problem med potenser är att $3 = 3^1$. När elever använder potenslagar har de ofta svårt att inse att de kan ta bort ettan. Ett exempel:

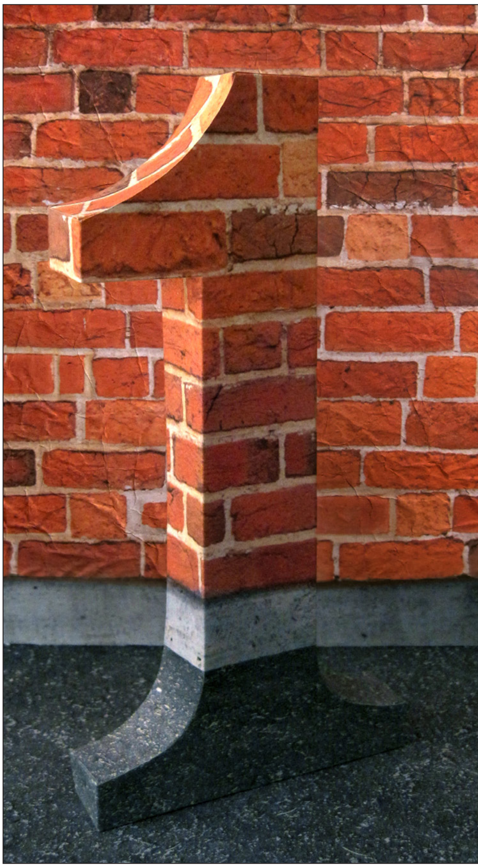
$$\frac{10^8}{10^7} = 10^{8-7} = 10^1$$

Även om de känner till den aktuella regeln, lämnar de ofta svaret 10^1, då de är för osäkra för att skriva 10 som svar. Att ofta lyfta fram $10 = 10^1$ kan hjälpa.

Algebra

Det finns många dolda tecken i algebra, så många att man nästan kan påstå att hälften av all algebra är grammatik. Här ska jag bara lyfta fram den osynliga ettan, $x = 1 \cdot x$.

Enligt min erfarenhet har det varit lättast att tillåta och till och med uppmuntra vissa elever att skriva ettan framför variabler som står "själva", främst de elever som har problem med algebra. Metodiken blir då mer konsekvent och onödig förvirring kan undvikas. Och för att knyta ihop algebra och potenser ser vi ofta problem med $x^1 = x$.



De rationella heltalen

Att heltal är rationella tal och därmed bråk är ett annat exempel på den dolda ettan, $3 = 3/1$. De flesta läroböcker har olika avsnitt för "multiplicera ett heltal med ett bråk" respektive "multiplicera två bråk". Men regeln är densamma om man kommer ihåg den dolda ettan:

$$3 \cdot \frac{2}{5} = \frac{3}{1} \cdot \frac{2}{5} = \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 5} = \frac{6}{5}$$

Visst kan det finnas ett värde i att koppla begreppet $3 \cdot 2/5$ till $2/5 + 2/5 + 2/5$, men man kan också vinna mycket på att visa en mer allmän regel.

Linjära funktioner

Problemet här är direkt knutet till problemet med heltal. När man förklarar den räta linjens ekvation, $y = kx + m$, kan ett par dolda symboler dyka upp. Till exempel, vad är k-värdet i funktionen $y = x + 3$? Dolda ettan igen. Men även funktioner som $y = 2x + 3$ kan vara ett problem när eleverna lär sig att k-värdet eller riktningskoefficienten är

$$k = \frac{förändring\ i\ y - led}{förändring\ i\ x - led}$$

Då underlättar det om eleverna inser att $2 = 2/1$ och att $x + 3 = (1/1)\ x+3$.

Förkorta i förväg

Att förkorta "i förväg", dvs att förkorta innan en beräkning är klar är en användbar teknik i matematik som kan spara mycket tid. Tekniken används bland annat inom algebra, kombinatorik och bråk, till exempel:

$$\binom{9}{3} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2} = \frac{\cancel{9}^3 \cdot \cancel{8}^4 \cdot 7}{\cancel{3} \cdot \cancel{2}} = 3 \cdot 4 \cdot 7 = 84$$

Problemet är att man inte brukar skriva ut ettorna när man stryker över tal. Då kan eleverna tänka så här: *jag har tagit bort allting i nämnaren, då är det noll kvar.* Det är då lätt att hamna i en situation där eleverna försöker dividera med noll eller får noll som svar. Det vore kanske bättre att redan från början skriva så här:

$$\binom{9}{3} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2} = \frac{\cancel{9}^3 \cdot \cancel{8}^4 \cdot 7}{\cancel{3}^1 \cdot \cancel{2}^1} = 3 \cdot 4 \cdot 7 = 84$$

Samma gäller för algebra:

$$4x = 12 \qquad \frac{4x}{4} = \frac{12}{4} \qquad x = 3$$

Men varför är 4x/4=x ?

Andra dolda ettor?

Det finns säkert andra ställen i matematiken där man kan hitta den osynliga ettan. Att tydliggöra för eleverna kan hjälpa dem att förstå någonting som de först tyckte var förvirrande. Det är viktigt att som lärare vara medveten om vilka problem som handlar om svårigheter med själva matematiken och vilka som handlar om grammatik, vilket i så fall är ett "språkproblem". Jag skulle gärna höra från andra lärare om liknande exempel.