Linda Marie Ahl & Ola Helenius

Varför är det så svårt att räkna ut hur mycket Börje har bantat?

Trösklar i elevernas utveckling av proportionella resonemang

Denna artikel är en uppföljning av *Varför är det så svårt att räkna ut hur lång tid det tar när vi hjälps åt?* i förra numret. Nu sätts fokus på växling mellan additiv och multiplikativ struktur, och hur läraren kan arbeta för att uppmärksamma problemet med sådan växling.

Kan dina elever multiplicera och dividera med ensiffriga tal? Kan de addera två tvåsiffriga tal? Fint! Då finns de procedurkunskaper som krävs för att lösa följande problem:

> Anna säger: Jag har bantat bort 1/8 min vikt. Jag har gått ner 9 kg.
> Börje säger: Jag har bantat bort 1/6 av min vikt, så nu väger du 17 kg mindre än vad jag gör. Hur mycket har Börje gått ned i vikt?

Precis som målarproblemet i vår förra artikel i Nämnaren 2017:2 verkar ju inte problemet så krångligt vid en första anblick. Trots det får många elever kämpa hårt för att reda ut hur mycket Börje har gått ner i vikt. Innan du läser vidare, lägg artikeln åt sidan och lös problemet själv.

Oavsett vilken strategi du valde så kommer du känna igen dig när vi belyser de centrala resonemangen. Men vad är det egentligen som sätter krokben för elever och andra, som inte får styr på sin uträkning? Går det att sätta fingret på vad som vållar problem? Jo faktiskt, med stöd i årtionden av forskning så går det vaska fram några centrala trösklar för elevernas utveckling av proportionella resonemang. En tröskel behandlade vi i *Varför är det så svårt att räkna ut hur lång tid det tar när vi hjälps åt?* Artikeln handlade om svårigheterna med att skilja på när det är lämpligt att relatera delar till varandra och när dessa delar ska relateras till en helhet. Nu är det dags för nästa tröskel, förmågan att växla mellan additiva och multiplikativa resonemang. Återigen är det just resonemanget som är kruxet, inte beräkningarna.

Det är skillnad på additiva och multiplikativa resonemang. Den här uppgiften testar och utvecklar elevernas förmåga att urskilja om och när situationen är additiv eller multiplikativ. Det är nämligen helt centralt att förstå problemet som en multiplikativ situation som kräver proportionella resonemang, men med ett inslag av addition på mitten. Forskning visar att elever tenderar att resonera additivt till dess att de undervisas om multiplikativa strukturer. När de väl har lärt sig att resonera multiplikativt tenderar de att överanvända multiplikativa resonemang, även på situationer som är additiva. Ja faktiskt på alla möjliga situationer, som till exempel:

> En stråkorkester med 15 musiker spelar en konsert på två timmar. Hur lång tid tar det att spela samma konsert för en stråkorkester med 30 musiker?

De som svarar fyra timmar (eller en timme) är exempel på elever som överanvänder multiplikativa resonemang, utan att reflektera över situationen. Orkestersituationen är varken additiv eller multiplikativ eftersom konsertens längd är konstant – den tar den tid den tar. Särskilt komplicerade situationer uppstår när eleven måste växla mellan additiva och multiplikativa resonemang, som i bantarproblemet.

Resonemang om problemets lösning

Låt oss tillsammans resonera oss igenom en lösning av problemet. Först och främst behöver eleven inse att det är nödvändigt att beräkna vad Anna väger nu, eftersom Börjes vikt anges i relation till Annas vikt. Annas viktproportioner behöver förstås och beskrivas. Hon har gått ner nio kg och då förlorat 1/8 av sin tidigare vikt. Av Anna finns nu endast 7/8 kvar. Det här är ett typiskt proportionellt resonemangsproblem; en multiplikativ situation där tre värden är givna och vi söker det fjärde.

$$\times 7 \quad \begin{array}{lll} 1/8 \text{ ANNA} & = & 9 \text{ kg} \\ 7/8 \text{ ANNA} & = & ? \end{array} \quad \times 7$$

Anna väger alltså 63 kg. Nu kommer det kritiska momentet när eleven behöver byta till additivt resonemang och utföra en beräkning, innan Börjes bortbantade vikt slutligen kan beräknas. I problemformuleringen har vi fått veta att Anna nu väger 17 kg mindre än Börje. Så Börje väger hela Annas nuvarande vikt plus 17 kg, det vill säga $63 + 17 = 80$ kg. Vi närmar oss slutet. Dags för ett proportionellt resonemang igen. Vi börjar med att reda ut Börjes viktrelationer. Eftersom Börje har bantat bort 1/6 av sin vikt så motsvarar hans nuvarande vikt på 80 kg de resterande 5/6. Börje har alltså bantat bort 80/5 av sin vikt, det vill säga 16 kg.

$$\div 5 \quad \begin{array}{lll} 5/6 \text{ BÖRJE} & = & 80 \text{ kg} \\ 1/6 \text{ BÖRJE} & = & ? \end{array} \quad \div 5$$

$$\text{BÖRJE HAR BANTAT } \frac{80}{5} = 16 \text{ kg}$$

Ni ser tydligt likheten i de båda bilderna ovan. De visar en schematisk representationen av en proportion som är en likhet mellan två förhållanden $a:b=c:d$. Den här representationen är en effektiv modell för att resonera om alla multiplikativa situationer där tre värden är givna och man söker det fjärde.

Låt oss titta på de matematiska procedurerna i lösningen. Eleven behöver multiplicera $9 \cdot 7 = 63$, sen addera $63 + 17 = 80$ och slutligen dividera $80/5 = 16$. Det borde rimligtvis elever på mellanstadiet klara av. Man kan undra om påståendet i rubriken verkligen stämmer, det vill säga att många elever har svårt att räkna ut hur mycket Börje har bantat. För att undersöka saken testade vi den här, och fyra andra uppgifter om proportionella resonemang, på 50 elever som går på ett tekniskt gymnasium. Det var bara tio elever som löste bantningsproblemet korrekt. Eftersom dessa elever är våra blivande ingenjörer, med ett särskilt intresse för matematik, finns det anledning att tro att det finns många fler svenska elever runt om i landet som har svårt att räkna ut hur mycket Börje har bantat bort.

En orsak

Vad beror det på? En orsak är att många lärare inte belyser skillnaden mellan additiva och multiplikativa resonemang. Det här blir särskilt tydligt om undervisningen planeras efter en lärobok där eleverna först ska addera några sidor och sen multiplicera några sidor, ja du vet hur det kan vara. Om eleverna inte får arbeta med problem som kräver att de funderar på och själva ska ta ställning till vad det är för underliggande matematiska strukturer som beskriver situationen, kan vi inte heller förvänta oss att de utvecklar den kompetensen. Står det multiplikation av bråk i rubriken till det avsnitt i boken som eleverna jobbar med, behöver de själva inte identifiera situationen.

Ett lektionsförslag

Om du vill hjälpa dina elever att passera denna tröskel ger vi nu ett förslag till undervisningsdesign. Ifall du läste vår artikel i förra numret kommer du att känna igen dig. Vi vill inte att du betraktar detta förslag som en universallösning, utan ser det som ett förslag som kan anpassas till din kontext, dina elever och era klassrumsnormer.

Vårt förslag är att du inom ramen för en lektion först låter eleverna arbeta enskilt med ett problem som kräver att de skiftar mellan att använda additiva och multiplikativa resonemang, under en fjärdedel av lektionen. I nästa fjärdedel av lektionen låter du eleverna tala med varandra i par om hur de har attackerat problemet. Därefter, tredje fjärdedelen, låter du en elev komma fram och visa sin lösning på tavlan och sedan en elev som har löst på något annat sätt. Finns det fler alternativ så är det bara bra, förutom att du måste kasta ett öga på klockan eftersom den matematiska poängen går förlorad om du inte hinner sammanfatta och belysa hur både additiva och multiplikativa resonemang krävs för att lösa problemet. Det ska du göra den sista fjärdedelen av lektionen. Spinn vidare på elevernas lösningar, för hur de än har angripit problemet så har de varit tvungna att urskilja om situationen är additiv eller multiplikativ (även om de inte tänker och talar om det på det sättet). Om det här blir stressigt att genomföra under en lektion kan du ge problemet i läxa. Då kan du starta direkt med pardiskussioner eller elevlösningar på tavlan. Du vet ju bäst själv vad som fungerar i ditt klassrum.

Liksom med problemet i den förra artikeln kommer många elever, särskilt i de högre årskurserna, att ha gått en onödigt krånglig väg genom att konstruera en eller flera ekvationer. Det är bra att lyfta fram en ekvationsbaserad lösning och kontrastera den mot lösningen som baseras på proportionella resonemang. Oavsett vilket, så är det viktiga för dig som lärare att i den avslutande genomgången uppmärksamma att den situation som beskrivs i problemet kräver att eleven växlar mellan proportionella resonemang och addition.

Låt tiden gå

Efter den här lektionen, låt det gå några veckor så att eleverna bara vagt minns det här med bantningen innan du plockar fram ytterligare problem av samma karaktär. Efter att ha arbetat med samma problemtyp några gånger börjar eleverna känna igen den. Men som vi skrev i den tidigare artikeln är det bra att det går en tid mellan det att elever arbetar med situationer av samma matematiska karaktär. Man kan bryta av med problem av den typ som vi tog upp i vår förra artikel. Det problemet kräver enbart att eleverna resonerar om förhållanden, dvs endast multiplikativa resonemang. När dessa problem blandas tvingas eleverna att tänka hårdare för att kunna skilja en viss problemsituation från en annan. Det har visat sig leda till att eleverna bättre kommer ihåg det de lär sig.

Eftersom många problem om proportioner och förhållanden bara kräver elementär procedurförmåga är det möjligt att börja arbeta med problem som kräver att eleverna växlar mellan additiva och multiplikativa resonemang redan i de tidiga skolåren. Att kunna identifiera vilket resonemang som är lämpligt är viktigt, samtidigt som det är dokumenterat svårt. Just därför är det smart att träna på det under lång tid, dvs introducera problem som rör denna typ av situationer tidigt i elevernas skolgång. Om eleverna tidigt får arbeta med resonemang som kräver att de växlar mellan additiva och multiplikativa resonemang, får eleverna fler möjligheter över tid att samla viktiga erfarenheter om begreppen. Det är bra undervisning som utvecklar elevernas begreppsförståelse och resonemangsförmåga!

Vi avslutar med att uppmuntra alla lärare som undervisar elever från åk 4 upp till högskola att använda det inledande problemet och undersöka hur eleverna växlar mellan additiva och multiplikativa resonemang.

Hör gärna av er och berätta hur det gick! Vi är intresserade av alla betraktelser om elevers förståelse för proportionella resonemang. Våra kontaktuppgifter finns på sidan 2.

Även denna artikel kommer att följas upp i kommande nummer.