

Hur resonerar elever med varandra?

Kerstin Larsson

Detta arbete genomfördes som en del av en kurs i matematikämnets didaktik vid Lärarhögskolan i Stockholm och handleddes av Ingvar O Persson. Det behandlar processen när en grupp elever tillsammans löser ett problem. Hur argumenterar de och hur övertygar de sig själva och varandra om vad som är rätt? Hur utvecklas deras förmåga att kommunicera i problemlösningssituationer?

När man löser ett problem tillsammans förutsätter det att man lyssnar och försöker förstå vad andra menar, att man kan formulera sina tankar så att de andra förstår hur man tänker. Hur klarar elever i åk 5 detta?

- Kan man märka någon skillnad i hur elever som är vana respektive ovana att lösa problem tillsammans talar med varandra kring ett problem? Talar gruppovana elever mer matematik än gruppovana?
- Lyckas de elever som är vana att lösa problem i grupp möjligen bättre än de som inte brukar göra det? Vad beror det i så fall på?

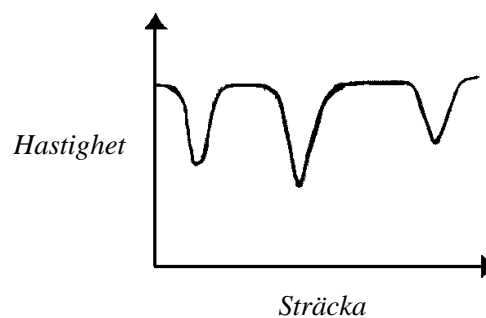
Jag lät några elever i åk 5 lösa ett problem där en graf visar en bils hastighet under ett varv på en racerbana. Problemet är hämtat från ett material som ges ut av Shell centre (1985). Eleverna kom från två olika klasser. Den ena klassen var åldersblandad och hade 8 elever i åk 5. De brukade arbeta ganska ofta, minst en gång i veckan, med problemlösning i grupp.

Den andra klassen bestod av 24 elever i åk 5, som ganska sällan, en till två gånger i månaden, arbetade med problemlösning i grupp. Lärarna delade upp eleverna i

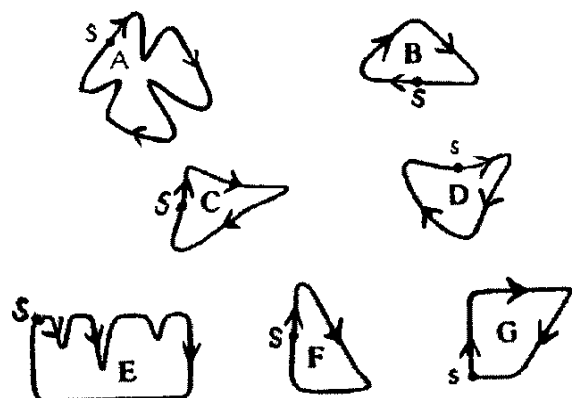
Kerstin Larsson är mellanstadielärare och arbetar som universitetsadjunkt i matematikdidaktik på Lärarhögskolan i Stockholm.

Racerbanan

Grafen nedanför visar hur en racerbils hastighet ändras under det andra varvet av ett lopp.



Hur såg racerbanan ut?
Välj bland dessa banor.



Varje gång som ni bestämmer er för att en bana är fel ska ni skriva ner varför det inte kan vara den banan

grupper om fyra och jag tog en grupp i taget till ett litet rum där de fick arbeta. Jag var närvarande hela tiden och antecknade vad de gjorde samtidigt som jag spelade in deras diskussioner på band. Samtliga elever i båda klasserna bandades. De fick instruktioner av mig att de skulle lösa problemet tillsammans – alla måste vara överens om svaret – samt att problemet gick ut på att bestämma vilken av racerbanorna bilen kört på då hastigheten ändrats som i grafen. De fick också instruktion om att det skulle skriva ner sina slutsatser i ett protokoll.

Jag har använt bandinspelningarna från fyra grupper, två grupper från varje klass, och studerat hur de olika grupperna kommunicerar med varandra, hur de lyssnar och tar till vara olika förslag som kommer upp och om eleverna tar sig tid att diskutera tills alla i gruppen känner sig säkra på hur det är eller om några ”kör över” de som inte förstår hur de andra menar.

Grupp 1 och 2 kommer från den klass som ganska ofta jobbar med problemlösning i grupp. Grupp 3 och 4 är från den klass som arbetar med detta mer sällan. Alla grupper består av både pojkar och flickor. Här redovisas de båda grupper som utmärkte sig mest. Grupp 2 var den enda grupp som var helt säker på att de hade löst uppgiften rätt. De behövde 48 minuter för att komma fram till det, men alla i gruppen var mycket nöjda med resultatet. Grupp 3 var den grupp som använde minst tid, 7 minuter, och också den grupp som visade mest osäkerhet över svaret. Den gruppen hade också en strategi som gjorde att de egentligen aldrig lyssnade och diskuterade.

Grupp 2 diskuterar

Jag har knappt hunnit börja förklara uppgiften förrän Stefan visar att han förstått grafens idé genom att följa den med ett finger och säga:

Och här är en kurva. (Pekar på grafen där hastigheten minskar första gången.)

Och så gasar den upp, och så gasar den upp, och så är det en kurva, en djävligt stor en, och så kör den runt så här, och så är det en raksträcka och så är det en kurva och så kör den...

BEA: *Det är alltså tre kurvor på den här?*

Även Bea har alltså förstått hur man läser av grafen. Efter att tysta ha funderat en stund börjar Bea och Stefan diskutera med varandra medan Linn och Jakob lyssnar. Både Stefan och Bea visar i sin diskussion att de förstår sambandet mellan grafen, bilens hastighet och hur snäva kurvorna är. Dags att låta de andra komma till tals:

BEA: *Okej vad säger Linn?*

LINN: *Jo men det tror jag. E har ju ... mummel.*

BEA: *Men E ser ut som det här diagrammet.*

LINN: *Jag vet men det är nog för att man ska bli förvirrad, tror jag.*

Linn har erfarenhet av hur det brukar vara i problemlösning: Inget är som det först verkar vara. Stefan hakar på och vill genast visa varför det inte kan vara bana E. Han räknar och pekar på banans alla kurvor och visar på så sätt att det är tolv kurvor. Stefan har definitivt insett skillnaden mellan vägarnas kurvor och grafens svängar, men hjälper hans räknande de andra att förstå? Bea och Stefan går tillsammans igenom sina argument till varför det måste vara bana C eller F. De analyserar kurvorna och jämför dem med grafen. De båda andra eleverna lyssnar noga och säger båda två att de tror det är bana C. Varför gör de det? De har lyssnat och hängt med i Beas och Stefans diskussion, just nu låter det trovärdigt för dem, men har de förstått?

Stefan upptäcker en orimlighet med bana D:

STEFAN: *Men jag tycker det att D, den här verkar ganska orimlig, för bilen kan inte köra lika fort om den ska svänga hela tiden.*

Vad han syftar på är att raksträckorna på D-banan inte är helt raka, de buktar inåt. Han får genast stöd av Bea.

BEA: *Man ser här att den kör lika fort om den inte är på någon kurva. Hela tiden så det måste vara någon så här någorlunda. (Pekar på grafens "raksträckor")*

Några minuter senare har de börjat skriva i protokollet och de har snabbt utslutit A, E och G på grund av att de har för många kurvor. Linn och Jakob tar inte del i diskussionen, men de lyssnar på de andra och tittar på deras pekande.

BEA: *Men kolla, F...*

LINN: *Det kan det inte vara för det är för liten väg här. (Pekar på grafens andra raksträcka)*

Linn har tidigare mest bara hållit med de andra i gruppen. Hon trodde först att det kanske var bana E men förstod av de andras resonemang skillnaden mellan grafens och vägens kurvor. När nu Stefan och Bea resonerar om skillnaden mellan C och F är det Linn som ser något nytt i grafen. Tidigare har de bara tittat på hur skarpa kurvorna är och jämfört detta med hur mycket bilen saktat ner. Nu ser Linn att man också kan titta på raksträckornas längd och jämföra dem med hur lång tid bilen kör med en jämn snabb hastighet. Bea förstår först inte alls vad Linn menar:

LINN: *Men det svänger...*

BEA: *Det svänger åt höger på C också.*

LINN: *Men vahettere titta här. Det är för liten väg här emellan jämfört här och där. (Pekar på grafens andra "raksträcka" och den andra raksträckan på bana F.) Sen blir det stor och då är det lika stor där. (Jämför grafens och F-banans tredje raksträckor.)*

BEA: *Men om man skulle köra åt andra hållet hade det varit rätt.*

Linn ger sig inte utan försöker förklara för Bea. Det märks tydligt att Linn har svårt att hitta adekvata ord, hon pekar och pratar högt och upphetsat istället. Beas kommentar om att det varit rätt om den kört åt andra hållet visar att hon ser vad Linn visar henne. Men den visar också att hon inte klarar att hålla både kurvornas och raksträckornas ordning i huvudet samtidigt.

Strax efteråt utbrister Stefan:

Men tänk på att det är här och här också. Här är det kort, kort... (Jämför grafens och C-banans första raksträckor) Här är det långt, här är det också långt ... här ... C!! (Jämför grafens och C-banans andra raksträckor)

Tydligen har Linns resonemang hjälpt honom att se denna nya aspekt av grafen. Han har jämfört bana Cs alla raksträckor med grafen och funnit att de stämmer överens. Han visar de andra. Det resonemanget är mycket svårt att förstå utan att samtidigt se hur han pekar, han säger egentligen bara orden långt, kort och här. När han övertygat de andra med sin oerhörda entusiasm frågar

BEA: *Okej, varför är C rätt då?*

Skratt

STEFAN: *Den är ju det!*

BEA: *Det måste vara bana C eftersom ... eftersom vi kör med utslutningsmetoden.*

Ingen i gruppen är nöjd med detta så de börjar försöka hitta ord som beskriver banans likhet med grafen. Stefan börjar då prata om raksträckor:

STEFAN: *Raksträckorna...*

BEA: *Men det är inte alla som fattar vad det är, t ex inte jag.*

STEFAN: *Men då skriver vi så här då: Här är en raksträcka och här... (Pekar på raksträckorna på bana C)*

BEA: *Ja, men det fattar jag. Jamen, det här är en raksträcka så. Det här är en raksträcka, det här är en raksträcka... men den är liksom böjd. (Pekar på C-banans andra raksträcka)*

Någon sekunds tystnad.

BEA: *Raksträckan är böjd! Hallå!*

STEFAN: *Raksträckan är böjd?*

BEA: *Ja. Efter andra, efter första kurvan är raksträckan böjd.*

BEA: *Om det här hade gått så här... (Ritar en rakare raksträcka)*

LINN: *Då skulle det varit rätt.*

BEA: *Ja.*

STEFAN: *Man tycker ju det.*

LINN: *Men hörni, det är ju som en kurva som inte märks nästan när man kör bil.*

BEA: *Javisst, men ...*

LINN: *Jomen, det svänger ju bara lite.*

Linn försöker få de andra att bortse från vägens ”inåtbuktning” med hjälp av vardagserfarenhet. Hon saknar dock argument som kan övertyga de andra. Det visar att vanliga ord som raksträcka, inte alls är självklara för eleverna. Det visar också att de här eleverna är inriktade på att förstå vad de andra säger. Eftersom de har intentionen att förstå varandra fungerar också ett relativt oprecist språk. Nu fortsätter de att detaljstudera alla raksträckor på banorna B, C, D och F genom att mäta dem med en pappersbit som får tjäna som linjal och jämför dem med motsvarande partier på grafen. De kommer fram till att det inte är någon bana som stämmer. Under hela detta arbete som de ägnar sig åt i ca tio minuter bortser de helt från kurvorna och koncentrerar sig enbart på raksträckornas längder. Till sist anser de att allt är *helt sjukt, alltså* och vill rita en egen bana som stämmer. De ber de mig om hjälp, men jag hänvisar dem bara till vad jag tidigare sagt, bl a att de måste vara helt överens om vilken bana det är.

BEA: *Men vi är inte överens om nånting.*

STEFAN: *Jo.*

BEA: *Vaddå?*

STEFAN: *Vi är överens om att A har för många kurvor.*

BEA: *Ja, det är vi överens om. C, F och D – det är dem det hänger på.*

Efter deras lilla sammanbrott bestämmer de sig trots allt för att göra ett nytt försök - att börja om från början. Har de lärt sig något under sina diskussioner och jämförelser då? Jo, alla är överens om att de inte behöver kontrollera A, G eller E igen eftersom de har för många kurvor. B har de också räknat bort eftersom mittenkurvan inte är skarpast.

STEFAN: *F lär ju inte vara rätt. F är ju utesluten bara för att det är för långt här emellan.* (Pekar på andra raksträckan på bana F) *Visst fasen är det C.*

BEA: *Är det C då?*

LINN: *C?*

BEA: *Vi var inne på C förut, men då kollade vi på att det var... C, vi skrev raksträckorna stämmer inte.*

STEFAN: *Nej, men det stämmer ju inte med den här kurvan...* (Pekar på den skarpaste)

BEA: *Men då kollar vi så här.* (Hon tar fram pappret de använde som linjal. De mäter bana Cs raksträckor igen)

BEA: *Så och den är ju kortare, den där är kortare än...* (Den andra raksträckan jämfört med tredje raksträckan på bana C) *Ja, det är den och den är ganska bra överhuvudtaget... Okej, då säger vi, då säger vi C!*

Och så har de bestämt sig. När de nu kommer fram till C och ska skriva varför, låter det lite annorlunda:

BEA: *Okej, Det måste vara bana C eftersom ... Skratt ... vi kör med uteslutningsmetoden.*

LINN: *Ja.*

BEA: *Ska jag skriva det?*

LINN: *Ja.*

BEA: *Det måste vara bana C för att...*

STEFAN: *För att vi har hittat fel på alla de andra.*

BEA: *Ja. För att vi hittade någonting som inte stämde...*

LINN: *...på alla andra banor.*

Det är återigen samma formulering som det var första gången för ungefär en halvtimme sedan. Då kunde de inte tänka sig att skriva så som de gör nu, varför? Jag tolkar det som att de nu känner sig mer säkra på att det inte kan vara någon annan bana än vad de gjorde då. De har mycket grundligt gått igenom alla banor. De har kontrollerat både kurvor och raksträckor gentemot grafen och känner sig nöjda. De frågar mig inte ens om svaret är rätt utan säger när vi senare är på väg ut ur rummet att om de har fel så måste det vara felritat på grafen eller banan för C är den enda möjligheten.

Sammanfattning av grupp 2

Grupp 2 arbetade med uppgiften i 48 min och deras diskussion upptar 13 sidors utskrift. De kom fram till rätt svar. Gruppen uteslöt alla felaktiga banor med hjälp av information från grafen. Möjligen uteslöt bana D på grund av att de ansåg att banans raksträckor inte var tillräckligt raka. De tog sig den tid de behövde för att övertyga sig om att de hade tänkt på allt och brydde sig inte alls om att lunchrasten hade börjat tio minuter innan de ansåg sig vara klara. De var mycket engagerade. Ett tag krisade det i gruppen när de inte kunde hitta någon bana som dög, men de tog nya tag och avslutade, helt nöjda med sig själva.

Grupp 3 svarar i tur och ordning

När jag förklarade problemet och vad man kan utläsa av grafen avbröts jag hela tiden. En synpunkt var att det måste vara backar när bilen går långsammare respektive fortare. Kanske är det en vardagserfarenhet från cykling. När jag sa att uppgiften var att bestämma vilken av banorna det är bilen kör, frågade en elev mig om jag menade "som var likadan". Jag svarade inte ja eller nej på frågan utan försökte återigen förklara att det gällde att hitta den bana där fartändringarna som syns i grafen stämmer med kurvorna på banan. Jag tror att i och med att de inte fick ett "nej" i början av den förklaringen så tolkade de det som ja. Säker kan man inte vara. I denna grupp bestämde sig några snabbt för bana E. Jag kanske borde ha förklarat en gång till, men tyckte inte att jag skulle säga mer till dem än vad jag sagt till de andra grupperna.

Mia tog pennan och protokollet och därmed också befälet. Hon var inte intresserad av att lyssna på de andras förklaringar till hur de tänkte kring bana E. De hade ju redan bestämt sig för att det var den, alltså *varför inte bana A?*

SANDRA: *Ja för att den går ju inte så där, den måste härma...* (Pekar på grafen)

MIA: *Men vi måste ju ha en logisk förklaring.*

Mia anser att det inte är en förklaring att bara säga att den inte är likadan som grafen. Ordet blir fritt. Christer är lite tveksam till att välja bana E.

SANDRA: *Varför har du inte E?*

CHRISTER: *E är ju så här så man måste bromsa in i de här kurvorna.* (Pekar på bana E)

SANDRA: *Mmm, och det är ju samma sak som på här.* (Pekar på grafen)

MIA: *Ska vi skriva E?*

Mia har uppmärksammat att alla inte är överens om E så hon frågar dem om de ska välja E. Alla säger "okej" och de undersöker gemensamt protokollet och undrar hur de ska skriva. När de inser att de måste motivera för varje bana som inte stämmer, bestämmer de sig för turordning.

MIA: *Vi kan väl börja med Sandra.*

SANDRA: *A är inte likt, tycker jag.*

Skriver

SANDRA: *Sen kan Christer få ta B.*

CHRISTER: *Men den är inga kurvor som man måste bromsa in i.*

De samtalar inte alls med varandra utan delar upp banorna i tur och ordning så att alla ska få svara på en var. De anser detta vara ett rättvist sätt att fördela arbetet, men får på så sätt inga nya infallsvinklar. Sedan händer det något.

ANDERS: *Det kanske är A! För om man sträcker ut A ser den likadan ut.* (Han visar med gester hur man kan ta i sär bana A vid startpunkten och veckla ut den)

SANDRA: *Men den går inte så här, att den håller på därnere.*

(Visar att vägsträckan tillbaka runt efter det grafliknande avsnittet saknas)

MIA: *Nä, vi har bestämt oss för E nu. Inga kurvor. Okej C, Anders.*

ANDERS: *C?*

MIA: *Ja varför det inte är C.*

ANDERS: *För den är heller inga kurvor.*

MIA: *Heller inga kurvor.*

Skriver

Anders upptäcker likheten mellan grafen och bana A. Om man betänker att den här gruppen är ute efter att hitta en bana som

liknar grafen så mycket som möjligt är ju detta förslag värt att fundera över. Men Sandras motivering att det saknas ett stycke väg jämfört med E som inte finns med på själva grafen accepteras av alla trots att det gör att E inte liknar grafen helt och hållet. Mia vill inte diskutera, hon vill göra färdigt uppgiften och låter Anders ta hand om förklaringen till varför det inte kan vara bana C. Vad menar han egentligen när han säger att den inte har några kurvor? Menar han att det inte finns så många kurvor, eller inte några kurvor som man måste bromsa i eller att det inte finns några kurvor som liknar grafens kurva? Anders ger sig dock inte.

ANDERS: *Ifall man sträcker ut A, då blir den likadan ju! Sträcker ut så ungefär.* (Visar igen så som han gjorde nyss)

SANDRA: *Nej, men E är ju jättelikt, tycker jag.*

MIA: *Men E är ju den som går upp och ner och så.* (Någon sekunds tystnad)
Men vi tar E.

Ordvalet avspeglar att det mer handlar om att de andra i gruppen vill bestämma sig för något och inte bryr sig om ifall det finns några skäl till att ta någon annan bana. Sedan fortsätter de på samma sätt att turas om och ge motivering till banorna som de bestämt att det inte är. Flera gånger är motiveringen att den inte passar till grafen.

SANDRA: *Man ser ju det logiskt, då borde den ju gå som på E så här...*

Sandra och Mia har nu flera gånger använt sig av ordet logiskt. De använder det för att tvinga någon annan att förklara sig ytterligare eller för att själva slippa göra det. Är det helt enkelt ett uttryck för makt som de använder utan att veta vad det innebär? Sen skriver de ner varför det måste vara E.

MIA: *... eftersom den är likast. Vad ska vi skriva mer... har kurvor...*

Skriver

SANDRA: *Har tre kurvor.*

MIA: *Tre kurvor.*

CHRISTER: *Ja just det den har ju lika många kurvor som den här.*

SANDRA: *Mmm*

MIA: *För vi tror, eller vi vet, att det är den.*

SANDRA: *Jo, det är ju självklart för det är ju sådana där bromsningar. E, den är rätt.*

Sandra är dock inte säker för hon frågar mig.

SANDRA: *Ska man härma? Ska den här vara likadan som den?* (Pekar på banorna och grafen)

Jag hinner knappt börja svara förrän jag avbryts av Mia och Anders.

LÄRAREN: *Tja, för, eh...*

MIA: *Det måste vara E, för titta den är så lik.*

ANDERS: *Det kan vara A också.*

MIA: *Nej det är inte A, den har bara en kurva.*

ANDERS: *Nej tre.*

ANDERS: *Joo, det kan va A, det lika gärna mycket vara A om man drar ut den.*

MIA: *Tänk logiskt, det ska bli som den.* (Pekar på grafen)

Mia visar tydligt att det här är ingenting att diskutera så alla tystnar. Jag frågar dem ifall de är klara och om de verkligen är helt överens om bana E. Alla svarar klart och tydligt ja. Så fort jag stängt av bandspelaren börjar de prata i munnen på varandra och gardera sig med andra banor och blir mycket besvikna när jag vägrar tala om vilken bana som var rätt.

Sammanfattning av grupp 3

Grupp 3 använde ca 7 minuter och deras diskussion upptar 5 sidors utskrift. Denna grupp bestämmer sig snabbt för en bana som de sedan håller fast vid. De försök som dyker upp att titta på andra banor slås snabbt ner av den gruppmedlem som tog rollen som ordförande och sekreterare. De gick in för att hitta den bana som liknade grafen mest, och det är ju bana E. Deras argument för varför det inte var de andra banorna var genomgående *den liknar inte* eller *den har inga kurvor*. De var allihop mycket osäkra på om de hade gjort rätt, men de ville inte fortsätta med uppgiften.

Skillnader mellan grupperna

Den gruppvana klassen är åldersblandad och har bara 8 elever i årskurs 5, så de blev bara två grupper. Båda dessa grupper kom fram till rätt svar. Den andra klassen består av 24 elever och bildade sex grupper. Två av dessa grupper kom fram till rätt svar och fyra gjorde det inte.

Jag fann *en markant skillnad* mellan klasserna – tiden de använde. I klassen där de var vana vid detta arbetssätt använde båda grupperna mer än 30 min för att lösa problemet medan de i andra klassen bara använde ca 10 min per grupp. Eleverna som var vana att lösa problem i grupp diskuterade mer matematik, eller snarare talade om matematik under längre tid. De var också mer säkra på om de gjort rätt eller inte.

Språkligt var det inga större skillnader i hur de använde ord och uttryck. Alla hade svårt att hitta ord som förklarade hur de tänkte. De visade mycket genom att peka, använda kroppsspråk och onomatopoetiska ord. Den största språkliga skillnaden mellan klasserna var att de som brukar berätta för varandra hur de tänker lyssnade mer på varandra. De ansträngde sig mer för att förstå vad de andra menade. I den andra klassen var eleverna mer inriktade på sin egen framställning än på kamraternas.

Jag tycker också att den mer gruppvana klassens grupper var mer processinriktade medan de andra var mer resultatnriktade.

Språk och problemlösning

Ju mer jag studerar dessa grupper diskussioner desto mer lär jag mig om språkets betydelse vid problemlösning. Några speciella samtalsmönster har jag inte lyckats hitta, men mycket annat. Eftersom de grupper som är mer vana vid att lösa problem i grupp lyckats bäst, kan man anta att övning ger färdighet. Med att lyckas bra menar jag att de inte bara kom fram till rätt svarsalternativ, utan att de också kände sig säkra på att de gjort rätt. De var framförallt bättre på att lyssna till de andras för-

klaringar. Det gör de varje vecka i samband med en matteläxa. Dessa elever var också mer engagerade i problemet och ville hitta en lösning som alla kunde förstå. En fördel med att jobba i grupp är att man är fler som tänker. Det utnyttjade inte grupp 3 alls, de diskuterade inte problemet utan ville ha en lösning snabbt. De arbetade i själva verket inte som en grupp.

Det är viktigt att ha ett språk som är användbart och precist i den situation som man arbetar. Ett problem som samtliga grupper hade var att avläsa och tolka grafen och bilden av vägbanorna. Dels skulle de förstå och dels skulle de klä sina iakttagelser i språklig dräkt för att de andra skulle kunna förstå. Detta var ett problem för alla grupper. Några införde egna benämningar som alla i just den situationen visste vad de betydde (tex när grupp 2 enas om vad raksträckor är). Andra gånger talade eleverna förbi varandra genom att de inte hade några entydiga språkliga begrepp. Det blev också tydligt när de skulle skriva ner sina iakttagelser. Skrivet språk ställer mycket högre krav på exakthet än talat.

Övning verkar ge färdighet. Men räcker det att vi ger eleverna gruppuppgifter och uppmuntrar dem att tala med varandra? Behöver de mer handledning än så? Jag anser det. Läraren har en viktig uppgift i att hjälpa eleverna att tydliggöra sina tankar, både för sig själv och för sina kamrater. Enligt min mening är vi lärare skyldiga att, oavsett inom vilket ämne vi arbetar, ta hänsyn till vilken språklig förmåga eleverna har samt verka för att utveckla den. Språk och tänkande hör ihop. För att kunna tänka om abstrakta och teoretiska ting måste vi ha tillgång till ord som beskriver dessa begrepp. Om våra elever ska utvecklas till goda problemlösare måste vi hjälpa dem att utveckla sitt språk genom medvetna aktiviteter där de inte enbart berättar hur de tänker utan också lyssnar aktivt till andras tankar och försöker förstå dem.

Referenser

Shell Centre for Mathematical Education (1985). *The language of Functions and Graphs*. Manchester: University of Nottingham.