EVA-STINA KÄLLGÅRDEN

Nu blommar det

– en utvecklingsplan i matematik?

Genom att välja bra problem kan vi få arbetsmaterial som räcker från förskola till universitet. Det blir ett arbete som går från specialfall till en generell lösning. Arbetet utgår från strävansmålen och har stöd i historisk utveckling av begrepp.

Lärare i grundskolan har uppdraget att tillsammans med elev och förälder skriva en utvecklingsplan i matematik för varje elev i klassen. (Den 1 januari 2006 trädde en ändring i grundskoleförordningen i kraft (7 kap. 2 §)). Planen skall utgå från strävansmålen som finns inskrivna i kursplanen.

För mig betyder strävansmålen att *undervisningen* har dessa mål som styrande för både innehåll och arbetssätt när den genomförs i klassrummet. Eleven får därigenom möjlighet till utmaningar i bland annat begreppsbildning, problemlösning, modellering och kommunikation, där logiska resonemang betonas.

Jag vill beskriva en utvecklingsplan som utgår från ett matematikproblem och som visar hur målen med matematikarbetet i klassrummet kan kopplas till hur ämnet matematik har utvecklats. Problemet utgår från en situation där olika mål för olika elever kan lyftas fram och där kriterier för bedömning av kunskap skulle kunna diskuteras.

En historisk koppling

I boken *Fackdidaktik volym III* finns en artikel skriven av Jan Thompson, där han beskriver hur den symboliska abstraktionen har utvecklats hos människan.

> *Genom den abstrakta symbolismen blir det möjligt att operera med objekt utan mening, storheter i tecken av bokstäver som sålunda endast bidrar med sig själva, men som så att säga tagit upp både talet och storheter, sådana som längd, area, volym och tid. Kalkylen utförs med tecken som spelar samma roll som marker i vanliga tärningsspel. Men pedagogiskt sett uppstår ett svårt problem. Risken finns att de matematiska begreppen alltför tidigt blir symboler utan mening och att matematiken stelnar.*

Här beskriver han en modell till en utvecklingsväg i undervisningen, som är parallell till den som matematikern Viéte gjorde på 1600-talet när han skapade den symboliska abstraktionen utifrån den retoriska matematik som Diophantos hade använt.

Första steget beskriver situationen med räkneord. Det andra steget visar hur räkneordet förenklats med ett tecken, en siffra och likheten med likhetstecken. I det tredje är *k* en förkortning av ordet kloss, och ordet *och* har bytts ut mot ett plustecken. Det sista steget visar kopplingen till vårt sätt att skriva ett uttryck med hjälp av symbolen x som nu betecknar ett tal vilket som helst. Här ingår både addition med tecken och multiplikation med utelämnat tecken. Att gå från det tredje till det fjärde steget är egentligen ett stort ”kliv”, och det tog mänskligheten 1300 år.

De fyra stegen

1 Tre klossar och fyra klossar är sju klossar

2 3 klossar och 4 klossar = 7 klossar

3 $3k + 4k = 7k$

4 $3x + 4x = 7x$

Hur kan ett matematikproblem som inbjuder till arbete med de fyra stegen se ut i undervisningen?

Att utvidga ett problem

Du har fyra blomkrukor på katedern. I rummet finns tre fönster, och du frågar klassen:

> *På hur många olika sätt kan vi placera de här fyra krukorna i våra tre fönster?*

Vad tror du händer om du inte ger fler anvisningar eller frågor? Ja, det är faktiskt värt att undersöka!

I förskoleklass och i liten grupp vill barnen pröva på riktigt. Då kommer diskussionen igång. Frågan gäller om krukorna är lika eller om det spelar någon roll vilka fönster de placeras i.

Här kan målet knytas till att eleven kan ange antal med räkneord (steg 1) och att de kan se uppdelning av antal. Strävansmål kan vara *kommunikation* och *problemlösning*.

Om eleverna är lite äldre (7 – 9 år) kan de få i uppgift att *rita tre fönster* och ”klippa ut” fyra krukor och räkna hur många olika möjligheter det finns att placera krukorna. Även här kommer eleverna på att det blir olika antal placeringar om fönster och/eller krukor är olika. Detta kan vara ett exempel på en situation där elevens taluppfattning kan stärkas genom att den anger antal med siffror och en uppdelning av antalet, t ex $2 + 7 = 9$ (steg 2). Abstraktion, problemlösning och begreppsbildning kan här kopplas till strävansmål.

För äldre elever i grundskolan kan problemet ges muntligt. Eleven gör sina egna val angående lika/olika krukor eller fönster och väljer sin egen metod att lösa sitt problem. Läraren kan efter en stund, när eleverna har ”tänkt färdigt” och eventuellt löst problemet, bilda grupper i klassrummet där elever som har valt ”samma” problem jämför sina lösningar.

Här uppstår helt naturligt en undran hur resultatet ser ut för de andra grupperna i klassen som har valt andra förutsättningar vad gäller krukor och fönster.

Att låta eleverna göra en liten utställning av resultatet är en idé, och/eller att låta dem beskriva med egna ord i sin loggbok kan visa sig vara en bra utvärdering av olika mål. Det kan vara något de lärt sig i problemlösning eller handla om något begrepp. Bland målen kan vara att strukturera material eller att representera i tabell, vilket kan ge läraren en fingervisning om elevernas begreppsbildning och färdighet i problemlösning.

”Blommornas” olika fall

Fall 1

> På hur många olika sätt kan *4 likadana blomkrukor* placeras i *3 likadana fönster* där ingen hänsyn tas i vilket fönster krukan placeras?

Det innebär att om det står fyra blommor i något av fönstren så räknas det bara som ett sätt.

Lösning med resonemangsmetod:

> Fyra i ett fönster. Då är det tomt i de andra två.
>
> Tre i ett fönster. Då finns det en kruka i något annat.
>
> Två i två fönster och tomt i det tredje.
>
> Två i ett fönster och en i vardera av de andra två.

Svar: Fyra olika sätt

Resultat kan också ses som det antal sätt som summan av tre termer är fyra, och där termernas ordning inte spelar någon roll.

Med symboler:

$4+0+0=4 \qquad 3+1+0=4$

$2+1+1=4 \qquad 2+2+0=4$

Fall 2

På hur många olika sätt kan *4 olika blommor* placeras i *3 likadana fönster* (*oberoende* av ordningen av dessa som i fall 1)?

Om ingen hänsyn tas till *hur* krukorna placeras i fönstret så gäller att:

Alla fyra krukorna i samma fönster: 1 möjlighet.

Tre i ett fönster ger att det finns 4 möjligheter att ta bort en från de fyra.

Två i två fönster ger 3 möjligheter bara. (AB, AC, AD i det ena och resten i det andra)

Två i ett fönster och en i varje i de två andra ger 6 möjligheter.

Svar: 14 olika sätt.

Fall 3

På hur många olika sätt kan *4 likadana blomkrukor* placeras i *3 olika fönster*?

Svar: 15

Försök att ordna i tabell kan ge resultatet

$(1+2+3+4+5)$

Fall 4

På hur många olika sätt kan *4 olika blomkrukor* placeras i *3 olika fönster*?

Svar: $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$

Varje blomma kan välja tre olika fönster.

Specialfall till generellt problem

Ett av målen i matematik är att kunna lösa ett matematikproblem med en generell formulering. Att omforma problemet till ett specialfall, att lösa detta och sedan återkoppla till det generella fallet och därigenom finna den generella lösningen är en metod.

Om vi nu som i vårt fall har löst specialfallet med de fyra krukorna i tre fönster, hur formuleras då det generella problemet, och hur ser lösningen ut?

Matematiken är känd för att översköljas med bokstäver som för den oinvigde kan uppfattas som helt kryptiska (steg 4). Det innebär att övergången från specialfallets värden på variablerna till det generella skrivsättet måste göras tydligt för eleven som "översättare". Nu betecknas krukornas antal med *bokstaven n* och fönstrens antal med *bokstaven k. Här är både k och n uttryck för antal, medan i specialfallet antal uttrycks med siffror* (steg 3 till steg 4).

"Blommornas" första fall kommer vid översättningen till generell frågeställning och generell lösning att övergå till:

På hur många olika sätt kan *n lika objekt* placeras i *k lika fack*?

Antalet sätt är lika med antalet sätt att skriva n som summa av k termer som är större än eller lika med noll, vilket kan uttryckas som antalet icke-negativa lösningar $n_1, n_2, \ldots n_k$ till ekvationen $n = n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_k$

Några exempel är:

$n+0+0+\ldots+0=n$

$(n-1)+1+0+\ldots+0=n$

$(n-2)+1+1+\ldots+0=n$

...

I det tredje fallet kan problemet uttryckas:

"På hur många olika sätt kan *n lika objekt* placeras i *k olika fack*?" Att åskådliggöra denna situation med en bild gör att lösningen kan inses på följande sätt: Först ritas specialfallet med 4 lika objekt och 3 olika fack som två lodräta streck. Strecken föreställer de två väggarna som skiljer de tre facken. I detta fall betyder det att vi betraktar 6 objekt varav två är väggarna.

Bilderna nedan visar (2,1,1) resp. (1,2,1) med det här exemplet två *olika* fall.

OO|O|O och O|OO|O

För att använda beteckningar från kombinatorik skrivs totala antalet som $\binom{6}{2} = 15$.

Detta svar är naturligtvis omöjligt för alla som inte träffat på en *sådan beteckning* att tolka. Att antalet är 15 går att resonera sig fram till genom att t ex rita och räkna alla tänkbara fall. En modell i matematik, som figuren ovan ger exempel på, ger möjlighet att generalisera problemet. Att skapa en modell är ”ett lyft” eftersom liknande problem kan lösas i samma modell.

Förklaringen till sättet att tänka och skriva är: (se bild ovan)

- Allmänt gäller att när 6 *olika* objekt skall placeras i ordning kan detta göras på $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6!$ sätt. 6! utläses sexfakultet. (På första plats finns det att välja mellan 6 olika objekt, sedan återstår det att placera 5 och därefter 4 föremål osv.)
- I vårt fall *om* det var olika färg på ringarna skulle dessa kunna placeras på 4! sätt. Men *nu är de lika* och alla räknas då bara som *ett* sätt. På motsvarande sätt gäller att de två sätt som *olika* väggar kan markeras räknas som *ett* när ”väggarna” *är lika*.
- Lösningen på vårt problem är det antal gånger talet $4! \cdot 2!$ går i talet 6! ?” d.v.s. $6!/(4! \cdot 2!)=15$
- Uttryckt i ord från matematiken är svaret ”antalet kombinationer som fås när 2 föremål dras från 6 föremål, utan avseende på den ordning i vilken föremålen dras” och det *korta skrivsättet* som ses i text är $\binom{6}{2}$ eller ${}_6C_2$.

De allmänna problemen inom området skiljer sig väsentligt i svårighetsgrad från specialfallen. Om man vill fördjupa sig ytterligare i matematik kan koppling till områden som *Stirlingtal* och *partitioner* vara ett steg till i utvecklingen.

Från universitet till förskola

Exemplet är kopplat till ett moment som benämns *kombinatorik* och som ingår i universitetskurser i *diskret matematik*. Diskret matematik är numera även en särskild kurs som eleverna på gymnasiet kan välja. I kursplanen för gymnasiet nämns bland målen som eleverna skall ha uppnått efter avslutad kurs att eleven skall ”vara förtrogen med viktiga egenskaper hos mängden av de hela talen och kunna tillämpa dessa i problemlösning” samt ”kunna använda grundläggande begrepp och principer inom kombinatorik… ”. Om man jämför betygskriterierna för G, VG och MVG för kursen finns följande angivet i kursplanen som första villkor i de tre betygsgraderna

G ”Eleven använder lämpliga matematiska begrepp, metoder och tillvägagångssätt för att formulera och lösa problem i ett steg.”

VG ”Eleven använder lämpliga matematiska begrepp, metoder, modeller och tillvägagångssätt för att formulera och lösa olika typer av problem.”

MVG ”Eleven formulerar och utvecklar problem, väljer generella metoder och modeller vid problemlösning samt redovisar en klar tankegång med korrekt matematiskt språk.”

För gymnasiet är detta tre kriterier, som ger tre *utvecklingsnivåer*. Dessa kan enligt min mening kopplas till en utvecklingsplan i matematik för gymnasiet. Med dessa som bakgrund, och med tillämpning av de fyra stegen i Thompson utvecklingsmodell, vore det rimligt att konstruera en utvecklingsplan för eleven i grundskolan, som relaterar till strävansmålen. I tolkningen av Skolverkets anvisningar om vad en utvecklingsplan i matematik skall innehålla krävs att läraren genomför en undervisning som är styrd av strävansmål snarare än uppnåendemål.

LITTERATUR

Thompson, J. (1986). Historiens roll i matematikundervisningen eller retorikens återkkomst. I Marton, F. (Red). *Fackdidaktik, volym III*. Studentlitteratur, Lund