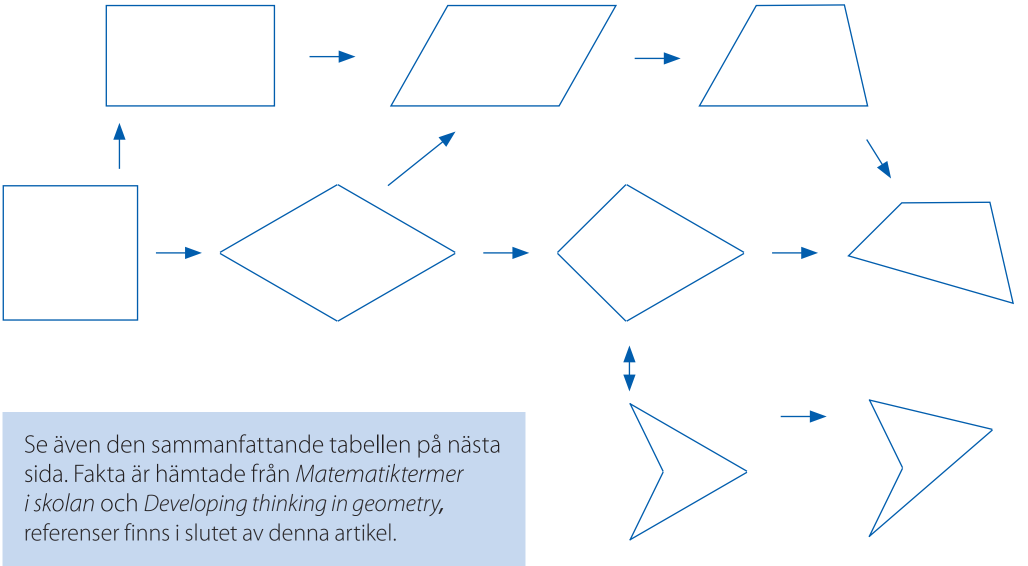
Pesach Laksman

Geometri med spagetti

Genom att undersöka månghörningars och cirklars egenskaper ges elever möjlighet att upptäcka samband och få en glimt av hur några matematiska idéer har utvecklats. De använder spagetti som konkret stöd för sina tankar då de undersöker figurer och för matematiska resonemang.

Spagetti är ett bra material att bygga månghörningar med. Det är enkelt och billigt att skaffa och lätt att bryta av på valfritt ställe. Låt eleverna börja med att lägga egna figurer och strama sedan upp arbetet till bestämda figurer som exempelvis fyrhörningar. Välj en elevs alster, placera det på en OH-projektor eller under en dokumentkamera, och låt eleverna beskriva fyrhörningens egenskaper.

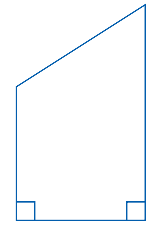
När egenskaperna är beskrivna och figuren förhoppningsvis även är namngiven, kan man fråga om någon har lagt en fyrhörning som har någon ytterligare egenskap. Är den utvalda figuren en rektangel går den att omforma till en kvadrat genom att egenskapen ”lika långa sidor” läggs till, är det en parallellogram kan det leda till antingen en rektangel om egenskapen ”räta vinklar” tillförs eller till en romb om egenskaperna utökas med ”lika långa sidor”. Det är även lämpligt att gå åt motsatt håll, dvs att ta bort någon av egenskaperna. Har vi startat med en rektangel hamnar vi på parallellogram efter borttagandet av kravet på rätvinklighet och med en parallellogram kan vi komma till parallelltrapets. Resultaten från aktiviteten leder till tanken att fyrhörningarna kan ordnas i ett slags släktträd. Det blir då uppenbart att exempelvis kvadraten är ett specialfall av rektangeln.



Se även den sammanfattande tabellen på nästa sida. Fakta är hämtade från *Matematiktermer i skolan* och *Developing thinking in geometry*, referenser finns i slutet av denna artikel.

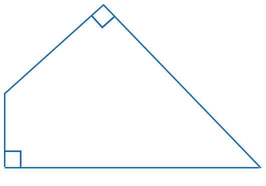
Fyrhörning	Sidornas längd	Sidornas parallellitet	Vinklarnas storlek	Konvex/konkav
Kvadrat	samtliga lika långa	parvis parallella	samtliga räta	Konvex
Rektangel	motstående parvis lika långa	parvis parallella	samtliga räta	Konvex
Romb	samtliga lika långa	parvis parallella	motst. parvis lika stora	Konvex
Parallellogram	motstående parvis lika långa	parvis parallella	motst. parvis lika stora	Konvex
Drake	närliggande parvis lika långa			Konvex
Pil	närliggande parvis lika långa			Konkav
Parallelltrapets		(minst) ett par parallella		Konvex

Övningen kan även ändra riktning. Istället för att eleverna får i uppgift att lägga godtyckliga figurer och bestämma egenskaperna på dem, får de nu i uppgift att utgå från bestämda egenskaper, exempelvis en fyrhörning med sidorna parvis parallella. Eleverna kan då upptäcka att vissa egenskaper automatiskt följer med, som t ex att motstående sidor är parvis lika långa eller att motstående vinklar är parvis lika stora. Detta visar på vikten av precisa definitioner. När vi definierar en figur behöver vi inte berätta om alla dess egenskaper. De egenskaper som är en konsekvens av andra egenskaper behöver inte nämnas. Det är helt omöjligt att lägga en fyrhörning med fyra räta vinklar utan att motstående sidor blir parallella och parvis lika långa. Därför är det fullt tillräckligt i definitionen av rektangel att endast nämna kravet på vinklarnas storlek.

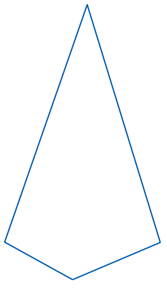


Månghörningars vinkelsummor

Att lägga fyrhörningar med bestämda vinklar är en bra övning. Be eleverna konstruera fyrhörningar med *två* räta vinklar. Förmodligen kommer de endast att lägga rätvinkliga parallelltrapetser. Måste det absolut bli parallelltrapetser med de givna villkoren? Troligtvis är elevernas slutsats att om två räta vinklar ligger vid samma sida skapas det två parallella linjer, men det sades inget om att de räta vinklarna skulle göra det. Det faktum att den andra figurtypen inte hittas direkt beror på att de är ovanliga och därmed svårare för eleverna att komma på.



Att bestämma vinkelsumman i trianglar tillhör skolmatematikens kanon. För att inte ha för bråttom med detta moment föredrar jag att ta omvägen via fyrhörningar, dels för att kännedom om vissa av dessa är större hos eleverna och dels för att proceduren inbjuder till reflektioner. Fråga eleverna hur många trubbiga vinklar det kan finnas som mest i en fyrhörning. Bli inte förvånad när de flesta svarar ”två”. Be dem motivera sina svar. Låt eleverna bygga fyrhörningar med det maximala antalet trubbiga vinklar. Nu brukar det dyka upp fyrhörningar med tre trubbiga vinklar.



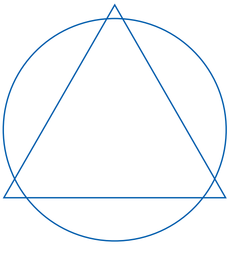
Uppmuntra eleverna att försöka få samtliga vinklar trubbiga. Det blir snart uppenbart att uppgiften är omöjlig att lösa. Prova med övningens ”motsats” dvs att bygga en fyrhörning med enbart spetsiga vinklar. Även här upptäcker eleverna att övningen är omöjlig och det finns goda förutsättningar för en hypotes om att fyrhörningars vinkelsumma är 360°. Eleverna känner ju en fyrhörning med den vinkelsumman, nämligen rektangeln, och om fyrhörningars vinkelsummor hade kunnat variera skulle det antagligen inte vara omöjligt att bygga fyrhörningar med endast trubbiga eller endast spetsiga vinklar. Efter någon form av verifiering av hypotesen, t ex att eleverna river av hörn i godtyckliga fyrhörningar som de har ritat själva och placerar dem bredvid varandra med vinkelspetsarna samlade i en gemensam punkt, kan eleverna undersöka vinkelsumman i trianglar på egen hand. Eftersom det är lätt att inse sambandet mellan triangelns och fyrhörningens vinkelsumma, finns det goda förutsättningar för generalisering och eleverna kan bestämma vinkelsumman i en godtycklig månghörning.

Cirkelns hemlighet

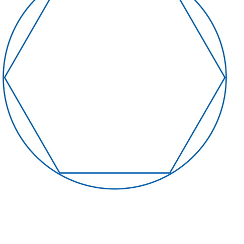
Jag minns en lektion i början på 60-talet då jag själv satt i skolbänken och vi skulle ta reda på relationen mellan en cirkels omkrets och diameter. Arbetet gick ut på att rita några cirklar och lägga ett snöre som hölls på plats med hjälp av knappnålar runt om. Sedan skulle vi mäta de avklippta, uträtade snörstumparna och cirklarnas diametrar samt utföra divisioner mellan dessa båda längder. De olika kvoterna låg strax över 3. Läraren var angelägen om att värdet skulle ligga på 3,14 och troligtvis var han därför tvungen att avslöja hemligheten om pi som ett irrationellt tal. Jag minns att jag blev väldigt nyfiken och frågade vad det betydde. Lärarens förklaring var att ingen sträcka, hur kort den än valdes, kunde läggas ett helt antal gånger både längs omkretsen och diametern.

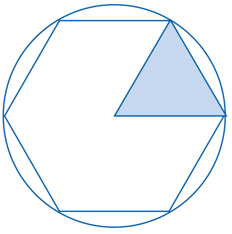
När jag själv blev lärare och reflekterade över den beskrivna lektionen kom en insikt om inkonsekvensen i förfarandet. Talet vi letade efter var irrationellt men ändå var själva förfaringssättet som om vi hade letat efter ett rationellt förhållande. Där fanns en uppenbar risk för att de enheter som användes, nämligen millimeter, kunde ses som referenssträckor som gick ett helt antal gånger i både omkretsen och diametern. Dessutom fanns det knappast någon anledning att använda en tredje sträcka när vi jämförde två längder. Det vore betydligt enklare att ha just diametern som referenssträcka.

Bland förmågorna i Lgr 11 nämns förmågan att föra resonemang. Vi har ofta för bråttom med att räta ut cirkelkurvan för att göra den jämförbar med diametern och missar lätt ett gyllene tillfälle att resonera och bjuda in eleverna till ett matematisk samtal. Efter att eleverna har ritat sina godtyckliga cirklar kan de bryta spagetti i bitar av diameterlängder. Därefter kan eleverna uppmanas att jämföra omkretsen i tur och ordning med *en* diameter, sedan *två* och så vidare, för att avgöra vilket som är längst. Omkretsen vinner uppenbart både mot en och två diametrar. Vid tre diametrar kan man inte dra någon slutsats baserad på logiskt tänkande. Anledningen är att ingen av de två konvexa figurerna cirkeln och den liksidiga triangeln, med diametern som sida, kan placeras innanför den andra. Om de placeras så att deras centra sammanfaller, korsar periferierna varandra. Vid fyra diametrar är det lätt att se att vi kan bygga en omskriven kvadrat med diametern som sida. Därmed vet vi att för cirkelns omkrets p gäller $2d < p < 4d$ där d står för diameter.



Med denna metod byggs en nyfikenhet upp efter noggrannare påståenden. Diametern är något otymplig på grund av sin längd och därför kan lyckan sökas med en annan sträcka kopplad till cirkeln, nämligen radien. Spagettibitar lika långa som en radie kan läggas så att deras ändpunkter ligger på cirkelperiferin och vidrör varandra en efter en. Om arbetet utförs någorlunda noggrant kommer eleverna fram till att det får plats ungefär sex sådana sträckor, vilka även bildar en inskriven regelbunden sexhörning.





Här är det på sin plats att väcka frågan om vi kan vara säkra på att det går att lägga just sex sträckor och om det är exakt eller på ett ungefär. Har eleverna förkunskaper om triangelns vinkelsumma och att vinklarna i en liksidig triangel är inbördes lika stora, ser de att exakt sex liksidiga trianglar med radien som sida kan placeras runt cirkelns medelpunkt.

Eleverna kan komma fram till att cirkelns omkrets är drygt sex radier eller tre diametrar. Metoden har dessutom historisk koppling, Arkimedes hade den som utgångspunkt när han jämförde cirkelns omkrets med inskrivna och omskrivna polygoner. Han startade alltså med en sexhörning för att sedan successivt fördubbla antal hörn så att tolv-, tjugofyra-, fyrtioåttahörning ledde processen till en nittiosexhörning – en figur vars omkrets ligger ganska nära cirkelns.

Vid det här laget kan eleverna ha utvecklat en viss önskan att kunna bestämma ett något bättre närmevärde. Här finns det troligen inte plats för Arkimedes tillvägagångssätt. Elevernas förkunskaper är kanske inte tillräckliga då det krävs både Pythagoras sats och en god portion av uthållighet. Den aktiviteten kan med fördel sparas tills större matematiskt kunnande har uppnåtts. Det eleverna däremot kan göra är att jämföra längderna av diametern och periferin med hjälp av ett snöre, som nämnts tidigare. De lägger då snöret så att det följer cirkelns periferi och klipper så att dess längd är så nära omkretsen som möjligt. För att få stor noggrannhet är det tillrådligt att arbeta med relativt stora cirklar. Därefter reduceras längden av snöret med en diameter åt gången efter en procedur som liknar tygförsäljarens. Efter tre reduktioner återstår en liten stump. Här skulle man förstås vilja veta hur lång den är uttryckt i diametrar och problemet ligger i att den är kortare. Det krävs en viss eftertanke (företanke vore nog ett mer passande ord) att komma fram till att vi kan vända på det genom att undersöka hur många stumpar det går på diametern. Vid en liknande procedur kommer eleverna förhoppningsvis fram till att den får plats sju gånger, eller där omkring, av vilket en slutsats kan dras om att en cirkels omkrets har den ungefärliga längden av 3 1/7 vars periodiska decimalutveckling 3,142857… överensstämmer väl i de två första decimalerna med det välkända 3,14.

Synen på matematik

De ovan nämnda aktiviteterna bjuder på matematiska upplevelser som antyder hur matematiska idéer har utvecklats. En för snabb behandling av matematiska ”sanningar” riskerar att flytta fokus från det väsentliga. I fallet med pi tror många felaktigt att det är identiskt med 3,14 och glömmer tyvärr att det är en relationskonstant och irrationell dessutom. Omkrets- och areaberäkningar är inte det stora målet med geometriundervisningen, men är oftast det som det koncentreras på. Vi måste inse att själva beräknandet bara är en av många komponenter i matematikämnet och att de andra komponenterna i form av beskrivande och resonerande samtal bör beredas betydligt större utrymme i undervisningen.

LITTERATUR

Blatner, D. (1998). *Pi – det fantastiska talet.* Stockholm: Svenska förlaget.

Johnston-Wilder, S. & Mason, J. (2005). *Developing thinking in geometry.* The Open University.

Kiselman, C. & Mouwitz, L. (2008). *Matematiktermer i skolan.* NCM, Göteborgs universitet.

Löwing, M. (2011). *Grundläggande geometri.* Lund: Studentlitteratur.