REZA HATAMI

Retorisk-resonerande matematik

I artikeln diskuterar och exemplifierar författaren relationen mellan retoriskt resonerande och symbolisk matematik. Genom att införa symbolisk matematik utan att förankra den i den retoriska kan arbetet med matematik lätt förlora den så viktiga resonerande aspekten och reduceras till mekanisk tillämpning av algoritmer.

Ett nödvändigt villkor för retoriskt resonerande matematik är, enligt min mening, att det vanliga språket används på något sätt. Ett tillräckligt villkor är att man använder sig av resonemang, t ex i dialog med någon annan eller med sig själv där man ställer enkla frågor och försöker besvara dem. Det kan hända att du skriver en matematisk formel med vanliga ord eller att du använder dig av vanligt språk i algoritmiska beräkningar. Detta uppfyller första kravet för retorisk matematik men inte andra kravet. Detta kallar jag alltså inte retorisk matematik. I artikeln kommer jag att använda mig av termen retorisk matematik när båda kraven är uppfyllda.

Om du hamnar i totalt mörker men har ett ljus – dina enkla frågor – i din hand så kan du ändå ta ett steg i taget och försöka besvara frågorna en i taget. Till slut är du framme vid lösningen. Genom att sammanfatta lösningen i en kompakt och allmänt gripbar form, eller åtminstone förståelig för dig själv, har du samtidig fördjupat dina tankar och argumentation. Detta är ett stort steg mot symbolisk matematik. Därför menar jag att retorisk matematik har koppling till såväl språk och argumentation som logik. Mot bakgrund av att vi alla argumenterar mer eller mindre varje dag, även elever i tidiga åldrar, kan retorisk matematik bidra till att skapa förståelse för mer avancerad matematik med dess kraftfulla abstrakta symbolspråk. Elever i unga åldrar kan få känna att man i matematik lär sig att resonera. Med retorisk matematik kan elever utveckla sin förståelse för matematik längre än vad som står i kursplanernas strävansmål. Verbala resonemang med oss själva eller med varandra är en mycket bra grund för att vår kunskap inte ska bli alltför symbolisk, bokstavlig och svårkommunicerbar.

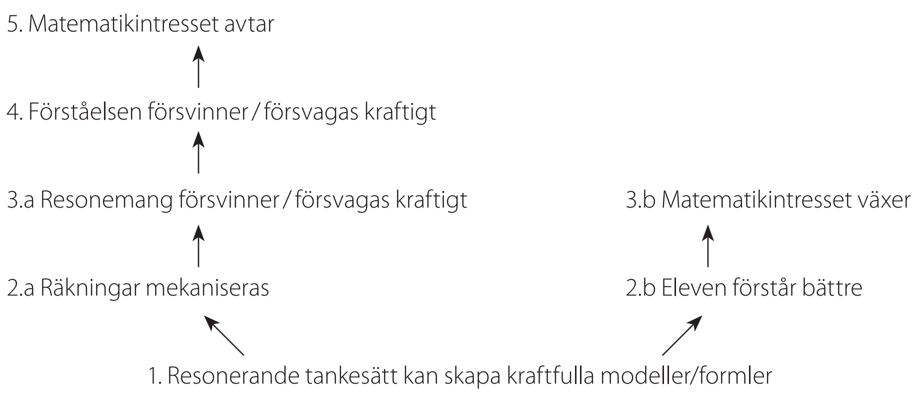
Införandet och användningen av algebra som ersättning för den retoriska matematiken kan ha sina konsekvenser. I bästa fall omvandlas det matematiska resonemanget till en skicklig metodisk beskrivning av en formel. Det är emellertid lätt att det matematiska resonemanget försvinner både om man utnyttjar de algoritmer som finns (t ex för beräkningar) och om man använder sig av det kraftfulla abstrakta symbolspråket. Matematik är en speciell humanistisk vetenskap som generaliserar och skapar modeller. Genom att resonera sig fram kommer forskare eller studerande fram till lösningar och metoder som sedan kan generaliseras till allmängiltiga regler. Poängen är att man därefter kan använda dessa för att lösa alla likartade problem mekaniskt. Jag menar att med ett resonerande tankesätt kan kraftfulla modeller skapas som mekaniserar räkningarna, vilket i sin tur gör fortsatta resonemang överflödiga. Det är viktigt att reflektera över denna paradoxala egenskap hos matematiken; samtidigt som nya metoder och begrepp utvecklas ur gamla så kan de gamla metoderna vara ett hinder för utvecklingen av de nya. Man hamnar lätt i en *pedagogisk paradox* (Uljens, 2001). Ska undervisningen sträva mot en önskvärd mekanisering av metoder samtidigt som man riskerar att tappa bort förståelsen på vägen?

På samma sätt förutsätter många gånger förståelsen av nya metoder att man arbetat med de gamla samtidigt som dessa i längden är ineffektiva. Denna speciella egenskap har under historiens gång skapat en dialektisk process inom matematiken. Aritmetikens och geometrins utveckling lade t ex grunden för algebran samtidigt som både geometri och aritmetik fungerade som bromsklossar för algebrans vidareutveckling. Negativa tal eller imaginära tal kunde inte accepteras till fullo för 200 år sedan, ty de hade varken en aritmetisk eller geometrisk betydelse.

En matematisk formel är en form av matematisk modell. En matematisk modell har enligt min mening mycket starkt koppling till dess användning inom matematiken, inom andra vetenskapsområden eller inom praktisk verksamhet. I diskussionerna kring det minskade intresset för matematik och naturvetenskap i dagens samhälle poängteras ofta vikten av att förstå matematik. Man kritiserar ofta elever, lärare eller skolan för att i alltför hög grad prioritera mekanisk räkning. Oavsett hur berättigad kritiken är verkar man ha glömt syftet med formler och algoritmer. Matematiska modeller har ett janusansikte. Å ena sidan är de generella formlernas effektivitet mycket viktig. I teori och, inte minst, i praktiska sammanhang är det viktigt att kunna räkna snabbt och effektivt. Ofta har denna sida av ämnet lyfts fram medan man försummat matematikens andra sida, dvs kunskapandet, förståelsen, resonemangen och den sköna upplevelsen. Om den symboliska matematiken introduceras för tidigt kan eleverna lätt förlora den matematiska begreppsförståelsen och förmågan att resonera.

Om vi låter den vänstra delen av modellen (se nedan) ta över försummas den högra delen. För att vi ska kunna ha vid liv relationen mellan 1, 2.b och 3.b krävs ständig reflektion och nivåhöjning av de resonerande tankesätten. Samtidigt är det meningen att vi ska komma fram till 2.a – skapandet/upptäckandet av lämpliga algoritmer för att kunna mekanisera beräkningar – som delmål i själva processen.

Proportionalitet är exempel på ett område där tre viktiga delar av matematiken kan integreras, nämligen aritmetik, geometri och algebra. En sådan integration kan ge den studerande en fördjupad förståelse. Den femte boken i *Elementa* behandlar proportionalitet ur ett aritmetiskt perspektiv. Bok 6 som handlar om geometriska figurers likformighet bygger på definitionerna och satserna i bok 5. Reguladetriproblem kan lösas med hjälp av ett par aritmetiska operationer eller med hjälp av ekvationslösning. Proportionalitet möter vi i skolmatematiken t ex i funktionsläran genom de algebraiska sambanden $y=kx$ eller $y/x=k$, där k är en proportionalitetskonstant. De motsvarar direkt proportionalitet (direkt / enkel



Figur 1. Matematikens två grenar.

reguladetri) respektive omvänd proportionalitet (omvänd reguladetri). I högre matematik svarar proportionalitet mot det så viktiga begreppet "linjaritet".

När elever i grundskolan blivit förtrogna med proportionalitet och kan lösa reguladetriproblem med hjälp av algoritmer kan man enligt min mening införa funktionsbegreppet som har en central roll i den moderna matematiken. Eleverna är då vid gymnasiestarten redan förtrogna med detta viktiga begrepp. Genom en sådan uppläggning av undervisningen får man en tydlig kontinuitet i elevernas matematiska kunskapsuppbyggnad. Den blir en spännande upptäcktsresa från enkla praktiska problem via proportionalitet till ett mycket abstrakt och centralt begrepp, funktionsbegreppet.

Närmare beskrivning av retorisk matematik

I den retoriska matematiken används som sagt det vanliga språket när man löser matematiska problem. Man resonerar sig stegvis fram till lösningen i stället för att använda sig av en färdig algoritm eller en matematisk modell. En matematisk modell kan vara en ekvation som man sedan löser med hjälp av bestämda regler. Om vi säger att två kronor plus tre kronor är lika med fem kronor är resonemanget retoriskt. Om vi istället skriver $2k+3k=5k$ där k står för kronor är det synkoperat – en blandform, där vissa symboler och förkortningar används. Ett mer abstrakt och därmed mer generellt skrivsätt är $2+3=5$ och vi kallar det symboliskt. Det symboliska skrivsättet gäller i alla sammanhang där vi vill beskriva det totala antalet element i unionen av två disjunkta mängder med två respektive tre element. I det symboliska resonemanget behövs bara kunskap om addition av de hela talen. Självfallet är det riktigt som A. N. Whitehead skriver, "Matematikens visshet beror på dess totala abstrakta allmängiltighet" (s 358).

I den retoriska matematiken är den symboliska algebrans formelspråk underordnat och resultaten härleds genom stegvisa resonemang i en kombination av ord och symboler. Den kan därför bidra till att tidigt skapa en grund för den mer avancerade matematiken med dess kraftfulla abstrakta symbolspråk. För att nå den abstrakta nivå som kännetecknar formell matematik kan det vara naturligt att successivt införa resonemang som på ett naturligt sätt närmar sig symbolisk matematik. De resonerande och argumenterande operationer som den retoriska matematiken kräver kan vara av stor betydelse för begreppsförståelsen. *Det är inte nödvändigt att motivera studiet av matematik med att framhålla att "matematik är roligt". Att motivera elever till skapande och kreativ verksamhet, som fordrar både fantasi och tålamod för en aktiv argumenterande/motargumenterande dialog, är en viktig uppgift för matematikläraren.*

Matematikens historia kan användas för att ge de studerande ökad förståelse för abstrakta matematiska begrepp. Att filosofera över matematik relaterat till dess historia skapar nya dimensioner åt undervisning och lärande. Jag vill inte separera matematikens historia från dess filosofiska dimension eller funktion och värde. I den historiska utvecklingen förbisågs aritmetikens och geometrins betydelse. De har både bromsat och varit utmaningar till algebrans och analysens utveckling och kanske också haft liknande betydelse för den enskilde elevens begreppsförståelse.

Att se matematiken enbart som en formaliserad vetenskap med ett kraftfullt symbolspråk, vilket är ett effektivt verktyg i olika tillämpningar, ger inte en rättvis bild av ämnet. Det kan liknas vid att lyssna till ett musikstycke enbart ur ett musikvetenskapligt perspektiv. I så fall har man missat den personliga upplevelsen. Genom att arbeta med retorisk matematik, något som till en början ofta är mödosamt, kan elever bättre tillgodogöra sig även den abstrakta matematikens symbolspråk.

Från retorisk till symbolisk matematik

Jag använder en uppgift från Bergsten m fl (1997, s 38) för att illustrera den retoriska och symboliska matematiken. Olika lösningar kan bjuda in eleverna till en mjuk och noggrann argumentationsatmosfär, vilket är en viktig komponent för matematiklärande.

I ett slott fanns det 26 stycken ljusstakar, en del sjuarmade och resten fyraarmade, tillsammans var det 128 armar. Hur många av ljusstakarna var fyraarmade?

Lösningar på nivå 1 – retorisk matematik

Alternativ 1a: Bild/figurativ argumentation
Vi börjar med att rita förenklade bilder av 26 ljusstakar som alla till en början har 4 armar. En beräkning ger oss att vi nu har totalt 104 armar. Vi ritar till 3 armar på en av ljusstakarna. Då är vi uppe i 107. Ytterligare tre armar på en ny ljusstake ger oss 110 armar. Vi fortsätter tills vi nått 128 armar. I figuren kan vi nu se att vi har 8 sjuarmade och 18 fyraarmade ljusstakar.

Alternativ 1b: Bild/figurativ argumentation
Vi börjar på samma sätt med att rita 26 ljusstakar som alla till en början har 4 armar, dvs totalt 104 armar. De resterande armarna (128 – 104 =) 24 tillhör de ljusstakar som ska ha 7 armar. Nu har de i bilden 4 armar och det fattas 3 armar. Med beräkningen 24/3 = 8 upptäcker vi att de sjuarmade ljusstakarna ska vara 8 och härmed fyraarmade ljusstakar 26 – 8 = 18.

Alternativ 2a: Ordargumentation
I den här lösningen ritar vi inga bilder. Eftersom varje ljusstake har minst 4 armar så har 26 ljusstakarna tillsammans minst $26 \cdot 4 = 104$ armar. De resterande 24 armarna måste då tillhöra de sjuarmade ljusstakarna som ännu bara har 4 armar. Alltså saknas 3 armar på varje. Hur många de sjuarmade ljusstakarna är får vi veta genom att dela 24 med 3, vilket ger 8. Alltså var de fyraarmade ljusstakar 26 – 8 = 18.

Alternativ 2b: (variant av 2a)
Om alla ljusstakarna hade fyra armar skulle de 26 ljusstakarna tillsammans ha $26 \cdot 4 = 104$ armar. Antalet armar ska vara 128 alltså måste (128 – 104 =) 24 armar tillhöra de sjuarmade ljusstakarna. Om vi byter ut en fyraarmad ljusstake mot en sjuarmad så ökar antalet armar med tre. Vi måste alltså byta ut 24/3 = 8 av ljusstakarna. Alltså de sjuarmade ljusstakarna är 8 och därmed de fyraarmade 26 – 8 = 18 till antalet.

Alternativ 2c
För vidareutveckling går operationerna att sammanfatta i en och samma beskrivning.

Antal fyraarmade ljusstakar =

$$= 26 - \frac{128 - 26 \cdot 4}{3} = \ldots = 18$$

Lösningar på nivå 2 – från retorisk till symbolisk matematik

Övergången från retorisk till symbolisk matematik är ett kognitivt språng som kan vara mycket svårt för en del elever som är dåligt förtrogna med kunskaperna i nivå 1. Därför bör allt på nivå 1 i första hand skrivas med vanligt språk, helt retorisk, ty då blir man inte bunden eller blind av symboler. Även argument och motargument hålls på detta sätt vid liv samtidig som är det oerhört viktigt att elever inte koncentrerar sig på svaret utan på processen, där de kan få stöd för den generella lösningen. Därför brukar jag (i denna uppgift) skriva (26 – 10) istället för 16. Det är ett bra stöd för att generalisera lösningen i följande tabell samtidigt som vårt matematiska tänkande hålls vid liv.

Innan vi tänker lite mer generellt börjar vi med en gissning/uppskattning. Om vi t ex antar att de sjuarmade ljusstakarna var 10 (färre än hälften och ett trevligt tal att räkna med) måste de fyraarmade ha varit (26 – 10) = 16 stycken. Vi kan göra flera gissningar till dess vi upptäcker ett generellt mönster. Men oavsett valet av tal är operationerna identiska så därför går det att generalisera gissningarna. Det blir tydligare om man noterar allt i en tabell. 10 sjuarmade var uppenbarligen för många så då kan vi väl prova med ett mindre antal, säg 6 stycken (se tabell 1).

Antal 7-armade	Antal 4-armade	Antal armar
10	26 – 10 = 16	$10 \cdot 7 + (26 - 10) \cdot 4 = 70 + 64 = 134$
6	26 – 6 = 20	$6 \cdot 7 + (26 - 6) \cdot 4 = 42 + 80 = 122$

Tabell 1

Tabell 2

Antal 7-armade	Antal 4-armade	Antal armar
10	$(26-10)$	$10 \cdot 7 + (26-10) \cdot 4 = 70 + 64 = 134$
6	$(26-6)$	$6 \cdot 7 + (26-6) \cdot 4 = 42 + 80 = 122$
s	$(26-s)$	$s \cdot 7 + (26-s) \cdot 4 = 128$

En motfråga här kan t ex vara: varför kan vi inte nöja oss med att lösa uppgiften med gissning? Det är inget fel på gissningar som ger korrekta svar, om vi endast är intresserade av svaret till specifika problem. Å andra sidan är det inte så enkelt med gissning om det ingår större tal. I matematiken är själva tänkandet viktigt eftersom det kan utgöra grunden för generaliseringar. Vi kommer att förlora poängen med det matematiska tänkandet och lösningsmetoder om vi enbart koncentrerar oss på svaret.

För att närma oss den symboliska nivån väljer vi istället en bokstav som får representera ett godtyckligt tal för antalet sjuarmade, t ex s (första bokstaven i sjuarmade). I så fall är antalet fyraarmade $(26-s)$. Detta kan man möjligen få hjälp att se utifrån mönstret i tabellen.

Ljusstakarna har 7 respektive 4 armar och det totala antalet armar för sjuarmade respektive fyrarmade måste vara $s \cdot 7$ respektive $(26-s) \cdot 4$. Enligt uppgiften har de tillsammans 128 armar, alltså $s \cdot 7 + (26-s) \cdot 4 = 128$, se tabell 2.

Lösningar på nivå 3 – symbolisk matematik

Alternativ 1 som naturligt resultat av nivå 2: förstagradsekvation

Vi väljer från början antalet sjuarmade ljusstakar till s, och då får vi antalet fyraarmade ljusstakar till $(26-s)$. På den här nivån startar vi helt enkelt direkt med symbolisk matematik.

Antalet sjuarmade: s
Antalet fyraarmade: $(26-s)$.
Då har vi: $s \cdot 7 + (26-s) \cdot 4 = 128$,
eller $7 \cdot s + 4 \cdot (26-s) = 128$

(enligt kommutativa lagen för multiplikation). Detta är lösbart som en förstagradsekvation.

Alternativ 2: ekvationssystem

Antalet sjuarmade: s
Antalet fyraarmade: f
Då har vi:

$$\begin{cases} s + f = 26 \\ s \cdot 7 + f \cdot 4 = 128 \end{cases}$$

$$\iff$$

$$\begin{cases} s + f = 26 \\ 7 \cdot s + 4 \cdot f = 128 \end{cases}$$

$$\iff$$

$$\begin{cases} s + f = 26 \\ 4 \cdot s + 4 \cdot f + 3 \cdot s = 128 \end{cases}$$

$$\iff$$

$$\begin{cases} s + f = 26 \\ 4 \cdot (s + f) + 3 \cdot s = 128 \end{cases}$$

$$\iff$$

$$4 \cdot 26 + 3 \cdot s = 128$$

Summan $(s+f)$ kan ersättas med 26. På det viset kan vi skriva om den andra ekvationen så att vi åter kommer fram till en ekvation med enbart en obekant. Den kan vi lösa på samma sätt som i alternativ 1. Här har vi använt de kommutativa, associativa och distributiva egenskaperna hos multiplikation och addition, vilka är viktiga för att vi ska förstå algebraiska manipulationer.

Ovanstående lösningsmetod av ekvationssystem är mycket användbar för elever i grundskolan. Redan med yngre elever kan man illustrera ekvationssystem med två olika sorters lådor som representanter för sjuarmade respektive fyrarmade ljusstakar. Den laborativa lösningen kan sedan successivt överföras till att ske enbart med papper och penna t ex genom att man ritar bilder i kombination med siffror och likhetstecken.

Med hjälp av förståelsen från resonemang i första och senare andra nivån på lösningsmetoder samt enkla varianter på den tredje nivån kan elever under sin grundskoletid få möta och använda olika angreppssätt, vilka i sig bäddar för den symboliska algebran. På det här viset kan eleverna förhoppningsvis se hur metoder i den symboliska matematiken är relaterade till resonemang i den retoriska matematiken. Under grundskoletiden kan eleverna då i högre grad utveckla sin förmåga till kritiskt tänkande/resonerande, som både är en viktig grund för matematisk tänkande och en betydelsefull förutsättning för att de ska kunna utöva sina medborgerliga rättigheter. Den retoriska och symboliska matematiken kan liknas vid ett mynt. Den retoriska matematiken är liksom klave, där ser man vilket land myntet tillhör. Den andra sidan av myntet (kronan) vilken beskriver myntets värde, är som den symboliska matematiken.

LITTERATUR

Bergsten, C, Häggström, J. & Lindberg, L. (1997). *Nämnaren Tema: Algebra för alla*. Göteborg: NCM.

Uljens, M. (2001). Om hur människan blir människa bland människor. Om pedagogik och intersubjektivitet. *Utbildning och demokrati 10*(3), 85–102.

Whitehead, A. N. (1959). Matematiken som ett element i tänkandets historia. I J. R. Newman (red.), *Sigma 1: en matematikens kulturhistoria* (s 356–370). Stockholm: Forum

Omslagsbilden: Orgel

Orglar har i grunden två typer av pipor, *labialpipor* och *tungpipor*. I labialpipor bildas tonen ungefär som i blockflöjten: genom att inblåsningsluften styrs in i ett rör genom en smal springa lämnad av en plugg som nästan pluggar igen röret, och mot den skarpa kanten till ett hål (labium) i rörets vägg. Både klangfärg och tonhöjd bestäms av de exakta måtten på alla ingående delar och av lufttrycket; men framförallt av rörets längd, form och om det är slutet eller öppet i bortre änden. Låga toner (låg frekvens) kräver långa pipor, flera meter för de lägsta tonerna. För de högsta tonerna räcker några centimeter.

I rörverk eller tungpipor bildas tonen i princip som på ett rörbladsinstrument (t ex saxofon). Rörbladet utgörs av en tunga som täcker ett hål i ett munstycke. Luften sätter tungan i svängning mot munstycket och försvinner sedan upp i det hål som munstycket har upptill. Tonhöjden bestäms till allra största delen av tungans längd, form och tjocklek.

I en sluten pipa förhåller sig frekvenserna för grundtonen och dess övertoner som de udda heltalen, dvs som 1 : 3 : 5 : ... Om pipan är öppen, förhåller sig frekvenserna däremot som 1 : 2 : 3 : 4 : ..., dvs som de naturliga talen. I både öppna och slutna pipor är grundtonens frekvens omvänt proportionell mot pipans längd. Tonen är dock en oktav lägre i en öppen pipa än i en sluten pipa av samma längd.

Omslagsbilden visar den nordtyska barockorgeln i Örgryte nya kyrka. Den har byggts på Göteborgs universitets orgelforskningsverkstad som en del av ett omfattande forskningsprojekt inom Göteborgs universitet och Chalmers tekniska högskola.

Målsättningen inom orgelprojektet har varit att på vetenskaplig grund skapa en nordtysk barockorgel från 1600-talet i Arp Schnitgers (1648–1719) anda. En viktig del av projektet har varit rekonstruktion av det dåtida orgelbyggeriets metoder och processer.

Tack till Örgryte församling för att vi fick tillfälle att fotografera orgeln.

LITTERATUR

Göteborg Organ Art Center. www.goart.gu.se/gioa/w-12.htm