Cecilia Kilhamn

# Funktionslådor

*Med funktionslådor kan elever tidigt möta funktionsbegreppet på ett praktiskt och laborativt sätt. Artikeln bygger på ett arbete i en matematikdidaktisk magisterutbildning där elever i skolår 3 och 5 studerats.*

Vad menas med en funktion? Om vi utgår från begreppets historiska utveckling är det inte så konstigt att vi i första hand vill betrakta linjära, kontinuerliga samband som funktioner eftersom det var för att beskriva sådana samband som funktionsbegreppet först växte fram. Däremot är det tveksamt om det är så klokt att elever inte får konfronteras med begreppet funktion i något sammanhang som kan kopplas till en modern definitionen av begreppet. I handboken *Matematikterminologi i skolan* finns en sådan definition som utgår från mängdläran.

> **Funktion**
> Om varje element i en mängd A entydigt tillordnas ett element i en mängd B säger man att man har en *funktion* från A till B. Funktionen är bestämd då man känner till alla paren $(x, f(x)) \in A \times B$.
> (Skolöverstyrelsen, 1979, sid 96)

Jag tror att man tidigt i skolan måste börja prata om funktioner med dess moderna definition och språkbruk för att eleverna ska få en möjlighet att inlemma ord som samband, relation, avbildning, mängd och variabel i sitt matematiska språk.

De babyloniska astronomernas kartläggning av himlakropparnas förflyttning över himlen illustrerade en transformation: himlakroppens position förändrades allteftersom tiden gick. De äldre definitionerna av funktionsbegreppet handlar också om transformationer, förändring, ofta av regelbunden, kontinuerlig karaktär såsom ”att kunna rita en kurva på frihand”(Eulers definition). Bara detta att tala om *kurvor* antyder kontinuitet. För att kunna beskriva en transformation sökte man en regel, ”a law” och funktionen kom att identifieras av själva regeln. Så småningom gled fokus över mer på resultatet av transformationen, dvs relationen, sambandet mellan enskilda punkter, ”the value”. För att få en väl utvecklad uppfattning om begreppet funktion menar jag att det är nödvändigt att kunna uppfatta båda dessa kvaliteter hos funktionen.

Intimt förknippat med begreppet *funktion* är begreppet *variabel*. Utan förståelse av begreppet variabel blir de äldre definitionerna av funktion fullständigt meningslösa. De moderna definitionerna, som utgår från mängder, saknar ofta *ordet* variabel men *begreppet* variabel är ändå en av hörnstenarna i förståelsen av funktionens idé. I boken *Matematiken i historien* (Thompson, 1996) drar Jan Thompson en del pedagogiska slutsatser av begreppshistorien. Han ser förmågan till manipulation av symboler som slutresultatet av ett antal kognitiva ”språng” som har gjorts i historien och som varje individ behöver göra i sitt eget lärande.

Bokstavssymbolen som beteckning för en generell variabel är en förutsättning för algebraiska beräkningar. Om man symboliserar fem stycken apelsiner med $5a$ så är $a$ endast en förkortning av apelsin, bokstaven $a$ betecknar ingen enskild apelsin utan snarare apelsinen som generell idé, men den betecknar ändå ett ting; tinget apelsin. Man kan inte beräkna till exempel $5+a$, för hur ska man lägga ihop en femma med en apelsin? Steget från att tolka $5a$ som fem stycken apelsiner, till att tolka $5a$ som fem gånger ett obekant tal som vi benämner $a$ är ganska stort. Först måste vi förstå att fem apelsiner kan skrivas 5, underförstått apelsiner, att fem ting kan abstraheras till enbart symbolen 5. Det är det första kognitiva språnget. Därefter att $a$ kan beteckna ett tal, till exempel ett antal apelsiner, som vi inte känner till. En abstraktion i två steg: $a$ symboliserar ett tal, som symboliserar ett ting. Det är det andra kognitiva språnget. När vi hit kan uttrycket $5a$ bli meningsfullt som beteckning för fem gånger ett obekant tal. Till en början, både historiskt och hos varje individ, tänker vi oss $a$ som ett obekant men bestämt tal, ett tal som vi bara inte känner till ännu. Nästa steg är att tänka sig att $a$ kan beteckna ett obekant tal vilket som helst, dvs en variabel. Ytterligare ett steg på vägen är att förstå att $a$ kan beteckna många olika tal på *samma gång*, ett godtyckligt tal i en viss mängd, en generell symbol för ett tal. Om vi sedan beskriver en grundmängd, definitionsmängd/domän, för denna variabel kan uttrycket $5a$ förstås som en funktion av $a$, där $a$ är den oberoende variabeln och den beroende variabeln bestäms av funktionen $f(a)=5a$ som kan representeras av en graf: en rät linje med lutning 5 som går genom origo.

> *Funktionen sedd som transformation* är i detta fall för värdet $a$, att $a$ genom inverkan av funktion transformeras till ett nytt värde som är fem gånger så stort, vilket illustreras tydligt i en ekvation.

> *Funktionen sedd som en relation* kan beskrivas så att varje värde $a$ (på $x$-axeln) relateras till ett värde $f(a)$ (på $y$-axeln), vilket illustreras tydligt i en *värdetabell*.

> *Funktionens helhet* är alla de värden som funktionen antar då $a$ genomlöper alla värden i definitionsmängden, vilket illustreras tydligt i en *graf*.

En väl utvecklad förståelse av funktionsbegreppet omfattar alla dessa tre aspekter av funktionen.

## Notation

Ett sättet att beteckna en funktion är med sk pil-notation. Exempelvis beskriver, $f: A \rightarrow B$, att funktionen $f$ avbildar element ur mängden $A$ på element ur mängden $B$. Det innebär att funktionens definitionsmängd är $A$ och att funktionens värdemängd är någon delmängd av $B$. Notationen $x \mapsto f(x)$ beskriver vad ett element $x$ avbildas på. Underförstått här är vad domän och värdemängd är. Denna beteckning är vanligast när det är underförstått att $A=B=\mathbf{R}$, mängden av de reella talen.

Notera att den enkla pilen $\rightarrow$ används för relationer mellan mängder, medan $\mapsto$ används mellan element i mängder.

Exempel,

$f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f$ definieras av: $x \mapsto 2x^2+3$

$f: \mathbf{R} \rightarrow \{0,1\}$, $f$ definieras av:

$$\begin{cases} x \mapsto 1 \text{ om } x>0 \\ x \mapsto 0 \text{ om } x \leq 0 \end{cases}$$

I funktionslådorna har jag valt att använda pil-notation eftersom det var lätt för barnen att förstå. Andra beskrivningar var mer förvirrande för ett barn, som aldrig tidigare mött begreppet funktion eller sett algebraiska bokstavsuttryck. Pilen från vänster till höger ledde dessutom automatiskt från in-hålet till ut-hålet på lådans insida.

## Är funktioner något för barn?

> *Alla barn kan förstå abstrakta men viktiga begrepp, såsom funktion, om begreppet utvecklas ur konkreta aktiviteter och gradvis abstraheras över en tämligen lång tidsperiod.*
>
> (Willoughby, 1997)

Funktionsbegreppet upplevs ofta som abstrakt och svårt när elever möter det i grundskolans senare årskurser. Många elever har inte heller utvecklat sin förståelse av vad en funktion kan vara när de börjar på gymnasiets A-kurs. Detta trots att deras vardag är fylld av samband som ofta beskrivs som matematiska funktioner. Funktionsbegreppet är ett abstrakt begrepp. Frågan är om man just därför ska ”skydda” eleverna från det så länge som möjligt för att inte förvilla dem, eller om man tvärtom bör introducera begreppet så tidigt som möjligt för att ge eleverna en laborativ erfarenhet som grund för sin förståelse?

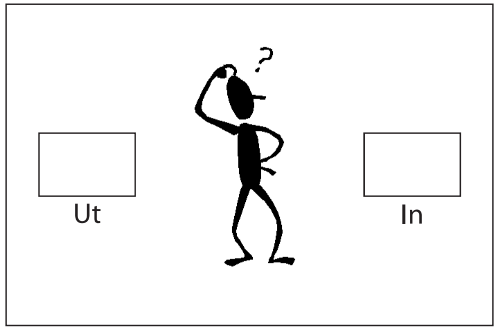
Idén med att arbeta med funktionslådor i tidiga åldrar är att underlätta begreppsförståelsen hos eleverna genom att tidigt använda begreppet funktion med dess rätta terminologi och notation i praktiskt laborativt arbete. Mitt första intryck av en klass i arbete med funktionslådorna var också mycket positivt. Frågan jag ställde mig var om detta arbete verkligen hade inlärningspotential, och om det var användbart i alla åldersgrupper. Dessa frågor blev utgångspunkten för en studie som jag genomförde i fyra klasser, årskurs 3 och 5, i Göteborgsområdet under våren 2003. Resultatet finns att läsa i min magisteruppsats (Kilhamn, 2003). I den här artikeln vill jag berätta om hur studien gick till och ge en del förslag på hur man kan fortsätta och fördjupa arbetet med funktionslådorna. I slutet av artikeln finns en mycket kort sammanfattning av resultaten från min studie.

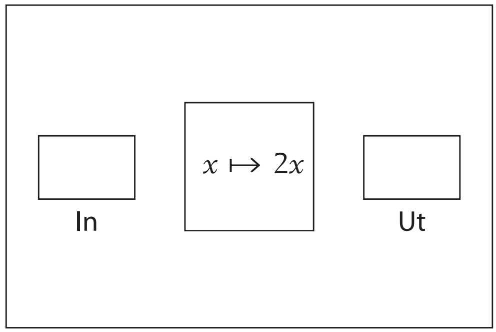
## Att arbeta med funktionslådor

Lådorna görs av kartonger. Jag har använt locken till lådorna som kopieringspapper levereras i. På lådans utsida finns en bild och ett in- respektive ut-hål. På insidan har jag satt en plastficka bakom vilken man kan sätta in ett papper. På pappret som sätts in beskrivs en funktion. De funktioner jag valt att använda i lådorna syftar till att ge exempel på olika typer av funktioner. Några exempel på funktioner i lådorna:

$x \mapsto x$ (identiteten)
$x \mapsto x+1$
$x \mapsto x-1$
ord $\mapsto$ första bokstaven i ordet
ord $\mapsto$ ordet baklänges
ord $\mapsto$ antal bokstäver i ordet

Den som vill ha en mer ingående beskrivning av lådorna och förslag på funktioner hänvisats till en tidigare artikel i Nämnaren (Fainsilber, 2002).




## Att ”göra” en låda

Att ”göra” en låda innebär att en elev ”är funktionen” och en annan undersöker densamma. Eleven som är funktionen sitter bakom lådan och har till uppgift att, beroende på vad som kommer in, skicka ut det som funktionen bestämmer. Denna elev tränar sig i att beräkna funktionsvärdet, dvs utföra räkneoperationer, om det är en numerisk funktion eller följa skrivna eller ritade instruktioner. En annan elev sitter framför lådan. Hon får veta vad som är tillåtet att skicka in i lådan, tal, färg, djur, namn, ord etc, dvs definitionsmängden. Hennes uppgift är att undersöka funktionen genom att skriva ett värde på variabeln på en liten lapp, skicka in den genom in-hålet och avvakta tills det kommer ut ett funktionsvärde genom ut-hålet. När hon har gjort detta några gånger kan hon titta på de värden hon stoppat in och fått ut och med ledning av dem försöka gissa hur funktionen ser ut. Den som undersöker tränar sig i att tänka logiskt och att försöka upptäcka mönster eller samband. För undersökaren blir det lätt så att funktionen uppfattas som en operation; något ”händer” inuti lådan, som förenar varje in-värde med ett ut-värde. Den som är funktionen (bakom lådan) kan däremot se funktionen i sin helhet, se strukturen. Hon vet i princip vilket värde som skall komma ut för varje möjligt in-värde hela tiden, att funktionen är alla dessa möjliga in- och ut-värden.

## Lektioner med funktionslådor

Första lektionen hade jag med mig 16 färdiga funktionslådor. Jag inledde lektionen med att, utifrån en fjärrkontroll till en tv, diskutera betydelsen av ordet funktion. Jag sa att i fjärrkontrollen fanns inprogrammerat en *funktion* som bestämde vilken kanal som kom upp när man tryckte på en viss knapp. Därefter gjorde vi tillsammans en funktionslåda med en numerisk funktion och en låda med en färgpermutation. Jag skrev också ett par funktioner på tavlan och talade om hur de skulle utläsas och tolkas. Efter denna inledning fick eleverna arbeta med de färdiga lådorna i smågrupper. Alla grupper fick tillfälle att prova numeriska funktioner såväl som funktioner med ord och funktioner med färger. Inom gruppen turades eleverna om att vara funktion. Målsättningen med den första lektionen var i stort sett att eleverna skulle bekanta sig med lådorna, förstå principen med lappar in och ut, få se att funktioner kan handla om allt möjligt och få prova på båda uppgifterna, att vara funktion och att undersöka.

Den andra lektionen satt eleverna parvis mitt emot varandra. Varje par fick en låda som innehöll två funktioner (den ena gömd bakom den andra) samt två vita papper. Jag inledde lektionen med att skriva några funktioner på tavlan som repetition och resonera utifrån dem vad de betydde och hur de skulle tolkas. I årskurs tre använde jag här samma funktioner som vi haft i lådorna gången innan, speciellt de som givit upphov till många frågor. I årskurs 5 undvek jag att kalla den obekanta variabeln $x$ utan valde andra beteckningar, och införde något mer komplicerade funktioner. Vi gjorde dessutom en eller två funktioner med lådor tillsammans. Det egna arbete började med att eleverna gjorde de två givna funktionerna. Alla elever fick både vara en funktion bakom lådan och att undersöka en framför lådan. Sedan fick de hitta på var sin egen funktion för kompisen att undersöka. Dessa skrev de ner på papper. Därefter varierade aktiviteten efter elevens val. Målsättningen med den här lektionen var att eleverna skulle få arbeta koncentrerat med lådorna, både med färdiga funktioner och med att hitta på egna funktioner. Att hitta på egna funktioner var mycket uppskattat och eleverna visade stor iver i detta arbete.

## Långsiktigt arbete med lådorna

När en klass fått en första introduktion till funktionslådorna kan man använda sig av dem som ett återkommande inslag i undervisningen. Räkneoperationer kan tränas genom att man skriver funktioner som innehåller just den operationen. En aktivitet med lådan blir då samtidigt en träning i räkning. Återkommande arbete med lådorna kan dock vara mycket mer. Det kan hos eleverna skapa en första förståelse av funktionsbegreppet, samt en förståelse av matematiska samband och relationer mellan variabler som gör det möjligt att senare hantera abstrakta algebraiska uttryck.

## Olika skrivsätt

När eleverna är vana vid lådorna är det viktigt att man ibland byter ut $x$:et mot andra variabelbeteckningar även i de numeriska funktionerna, så att eleverna inte fastnar i tanken att en variabel måste betecknas med $x$. Det som är av intresse är funktionen, inte dess representation som kan variera. Efter en tids arbete med de stora lådorna är det naturligt att arbetet med funktioner frigörs från de klumpiga lådorna. När arbetet som från början vara roligt just för att det var ”hemliga lådor” börjar upplevas som tidsödande och omständligt, är det dags att börja skriva funktionen på ett papper.

Det är lämpligt att så småningom visa eleverna hur man kan skriva funktionen på ett annat sätt. Efter att ha använt pilmodellen, t ex $x \mapsto 2x$, kan förståelsen av skrivsättet, $f(x) = 2x$, underlättas, dvs att $x$ är den oberoende variabeln som ”stoppas in i ” funktionen och att både $f(x)$ och $2x$ betecknar funktionsvärdet som kommer ut. Nästa naturliga steg blir att göra en värdetabell av


in- och ut-värdena och plotta dem i en graf. Här kan beteckningen $y$ för funktionsvärdet komma in för första gången eftersom man ritar in sina punkter i ett koordinatsystem med $x$- och $y$-axel. För funktionen $f(x)=2x$ är $x$ värdet på $x$-axeln och $f(x)=y$ är värdet på $y$-axeln. Nu är man framme vid den gängse algebraiska formen för en funktion: $y=2x$. På detta sätt kan man utifrån den operationella aspekten av funktionsbegreppet upptäcka andra sätt att illustrera en funktion, såsom graf, värdetabell, algebraisk formel. Givetvis kan man introducera grafer från andra hållet genom att beskriva funktionen inuti lådan med en graf.

Beteckningen $f(x)$ kan vålla bekymmer för många elever när de möter den för första gången i årskurs nio (se Bergsten m fl, 1997). På det här sättet blir beteckningen förhoppningsvis en naturlig följd av det laborativa arbetet och bör därför inte skapa några problem trots att eleverna är betydligt yngre. Det viktiga är att den abstrakta symbolen införs efter förståelsen av begreppet och inte tvärtom (Willoughby, 1997).

## Sammansatta funktioner

Två lådor kan sättas efter varandra på ett sådant sätt att ut-värdet från den ena lådan blir in-värde i nästa låda. Vad händer då? Sätt exempelvis först funktionen $f_1: x \mapsto 2x$ och därefter funktionen $f_2: y \mapsto y+3$. Om $x=1$ matas in i den första lådan får vi ut 2, vilket matas in i den andra lådan och vi får då ut 5. Får vi samma sak om vi tar lådorna i omvänd ordning, dvs kommuterar funktionerna? Eftersom eleverna kommer att upptäcka att vissa funktioner kommuterar och andra inte kan man låta deras erfarenheter illustrera algebraiska räkneregler.

Exempelvis: $2(x+3)=2x+6$ vilket man får om man tar $f_2$ först och sedan $f_1$ medan man får $2x+3$ om man tar dem i andra ordningen.

När två lådor sätts efter varandra kan man ena gången låta den första funktionen vara okänd och den andra känd, nästa gång tvärtom och så småningom kan man låta båda vara okända. Ett annat sätt att arbeta är att eleven får se båda funktionerna och ut-värdet men inte det ursprungliga in-värdet. För att lista ut det måste man räkna "baklänges".

Man kan också fråga eleverna om de kan hitta en funktion som tar tillbaka ut-värdet till det ursprungliga in-värdet, dvs finns det en invers funktion? Har alla funktioner en invers funktion? Finns det funktioner som, om man upprepar dem flera gånger, leder tillbaka till ursprunget? Kan eleverna hitta funktioner som uttrycker cykliska förlopp så kommer man osökt in på modulo-räkning, något som normalt inte ingår i grundskolans matematikkurser, men som kan upplevas som både spännande och roligt och som också är relaterat till positionssystemet. Funktionen, $x \mapsto x+1$, där $x$ får vara ett klockslag, enhet hela timmar, ger räkning modulo 12 och det behövs precis 12 sådana funktioner för att komma tillbaka till ursprunget, identiteten.

På det här sättet kan man fortsätta att laborera med funktionslådorna och utföra operationer på symbolerna. Hela proceduren har nu blivit abstrakt trots att den uppkommit ur de ”konkreta” lådorna.

## Vilka kan arbeta med lådorna?

Om instruktionerna ges muntligt och funktionerna i lådorna i början bara innehåller bilder går det alldeles utmärkt att använda dem redan i förskoleklass. Willoughby (1997) beskriver ett sådant arbete där den första funktionslådan var så stor att ett barn fick plats inuti. Funktionen förmedlades muntligt till barnet inuti lådan och kamraterna utanför fick turas om att skicka in ett visst antal saker eller färglappar. Det väsentliga är att inte ge för många instruktioner åt gången och att väldigt sakta öka svårighetsgraden på funktionerna och mängden symboler som används.

## Sammanfattning av resultaten

Funktioner handlar om samband och för att ha en väl utvecklad förståelse av begreppet funktion bör man kunna uppfatta samband dels som *relationer* mellan objekt eller mängder och dels som *transformationer.* Vissa funktioner är tydligare på det ena sättet, andra på det andra, och somliga förstår man först när man kan se dem på båda sätten samtidigt. I det insamlade materialet har jag funnit ett antal olika kvaliteter i förståelsen av funktionsbegreppet. Dessa har jag ordnat efter hur långt utvecklade de är i en lärandeprocess.

i: ovisshet, tvekan
ii: fokuserar på notationen, symbolerna
iii: felaktiga samband eller mönster
iv: konkreta exempel
v: som en relation.
vi: som en transformation.
vii: både som relation och som transformation.

Kategori ii, iii och iv är ofullständigt utvecklade begrepp av olika karaktär, vad Schwingendorf m fl (1992) skulle kalla *prefunction.* Förståelsen här kan sägas vara begränsad och i viss mån kan eleven här även ha missförstått begreppet. I kategori v, vi och vii är begreppsförståelsen väl utvecklad och här återfinns kategorierna *action* och *process*, kategori v, samt *correspondence* och *dependence*, kategori vii.

Man kan i inlärningsprocessen tänka sig en utveckling uppifrån och neråt, men ingenting säger att varje elev måste passera alla steg. Kanske kan man gå direkt från i till vii utan närmare reflektion. Om det är så blir den intressanta frågan varför somliga stannar på vägen och hur de ska hjälpas vidare.

Resultaten av min studie pekar på att många av de elever som arbetat i två lektioner med funktionslådor skapat sig en förståelse av begreppet funktion som avancerat från en förståelse på nivån *prefunction* (kategori ii, iii och iv) till en mer utvecklad förståelse (kategori v, vi och vii). Funktionslådan som metafor för funktionen blir i så fall en god metafor, en användbar och utvecklingsbar tankeform. För vidare utredning och diskussion av mina resultat hänvisas till mitt arbete (Kilhamn, 2003).

## Vanliga missförstånd

I en undervisningssituation är det viktigt att man som lärare är medveten om på vilka sätt en elev kan missförstå ett begrepp eller en symbol. Jag fann några sådana missförstånd som man bör vara uppmärksam på. Främst var det tolkningen av $x$. Jag blev förvånad över att så många elever tolkade variabelbeteckningen $x$ som ett multiplikationstecken. I anglosaxiska länder där man använder sig av ett kryss som symbol för multiplikation är detta missförstånd förväntat och man påpekar skillnaden tydligt för eleverna. Eftersom vi i Sverige använder oss av en punkt som symbol för multiplikation förväntade jag mig inte det missförståndet här. Resultatet är ett exempel på att elever ofta har en förförståelse från erfarenheter utanför skolan, och denna förförståelse är lika viktig i deras begreppsbildning som den erfarenhet de får i skolan. Jag skulle tro att många av dagens elever har suttit så mycket vid datorernas tangentbord och spelat datorspel att krysset blivit en självklar symbol för multiplikation för dem. Detta är viktigt för skolan att uppmärksamma och använda sig av i undervisningen så att elevers förförståelse hjälper dem och inte stjälper dem. I det här fallet gör förförståelsen att de missförstår symbolen.

## Lusten att lära

Lusten att lära betonas idag som en mycket stark drivkraft i lärandeprocessen. Jag fann genom mina enkäter och intervjuer att det här sättet att arbeta med matematiken upplevdes lustfylld och intressant av många elever, fler än vad som gällde för "vanliga" matematiklektioner. En orsak är givetvis att det var något annorlunda, vilket för de allra flesta brukar innebära ökat intresse. Lärdomen av det bör bli att det är positivt att variera undervisningen och ibland ta in ett annorlunda sätt att arbeta. Roligast i det här arbetet var momentet att skriva egna funktioner. Inlärningspotentialen i den aktiviteten är hög eftersom den utmanar och engagerar samtliga elever på deras egen nivå. Ingen skriver en funktion som hon inte själv förstår, samtidigt som många av de villkor som definierar en funktion upptäcks av eleven själv när hennes funktion inte förstås av andra eller inte går att lista ut. Exempelvis entydighet, lika funktioner, definitionsmängd och värdemängd.

Jag vill slutligen, med utgångspunkt från min studie, påstå att funktionslådorna ger ett positivt inslag i undervisningen, att elevernas begreppsutveckling får en bra start och att funktionslådorna är en användbar metafor för funktionsbegreppet. Det skulle vara intressant att utveckla en mer systematisk och långsiktig handledning för arbete med funktionslådor i årkurs 3 till 6 och sedan låta ett antal klasser arbeta med dem återkommande under fyra år för att se om de hanterar och förstår funktioner på ett annorlunda sätt än sina jämnåriga när de senare konfronteras med dem i läroböckerna.

### REFERENSER


Bergsten, C., Häggström, J. & Lindberg, L. (1997). *Algebra för alla. Nämnaren TEMA*. Göteborg: NCM, Göteborgs universitet.

Fainsilber, L. (2002). Ett funktionsrum. *Nämnaren 29* (2), 16-19.

Kilhamn, C. (2003). *Är funktioner något för barn? En konkret introduktion till funktionsbegreppet i grundskolans lägre årskurser.* Göteborg: Matematiska Institutionen, Göteborgs Universitet.

Schwingendorf, K., Hawks, J. & Bieneke, J. (1992). Horizontal and Vertical Growth of the Students´ Concept of Function. I G. Harel and E. Dubinski (red.) *MAA Notes Volume 25: The Concept of Function. Aspects of Episemology and Pedagogy*. Washington: Mathematical Association of America.

Skolöverstyrelsen (1979). *Matematikterminologi i skolan*. Stockholm: Liber.

Thompson, J. (1996). *Matematiken i historien*. Lund: Studentlitteratur.

Willoughby, S. (1997). Functions from kindergarten through sixth grade. *Teaching Children Mathematics*, 3, 314-319.



***Cecilia Kilhamn*** *är lärarutbildare vid Göteborgs universitet.*