

Utvecklande problem

Frances R. Curcio, Barbara Nimerofsky,

Rosanna Perez & Shirel Yaloz

Artikeln beskriver elever i Middle School, årskurs 5–8, som arbetar med tidig algebra. Via otraditionella problem gör eleverna upptäckter om mönster och generaliseringar. I diskussioner utvecklas deras beskrivningar till symbolspråk. Undervisningen sker i heterogena grupper där grupp- och klassdiskussioner spelar stor roll.

De senaste åren har vi undersökt olika sätt att introducera algebraisk notation för våra elever. Med hjälp av otraditionella problem har vi funnit ett meningsfullt sätt att engagera eleverna i att undersöka och beskriva mönster algebraiskt, göra antaganden kring de mönster de ser, beskriva relationer mellan delar i mönstret och så småningom generalisera och uttrycka dessa relationer med symboler – nödvändiga ingredienser i ett algebraiskt tänkande. Här ska vi visa några rika problem och elevernas förklaringar, antaganden och generaliseringar kring de mönster de upptäckt. Vi anser att detta sätt att integrera algebra med problemlösning är helt i linje med den syn man numera har på algebra för elever i denna ålder (NCTM 1989, 1992; Phillips 1991).

Med problemlösning i fokus

En del av vår undervisningsidé är att engagera eleverna i att analysera, lösa och diskutera problem som inte är typuppgifter. Ibland får de en uppgift att arbeta med under en vecka, ibland utvecklas problemen ur en klassdiskussion. När eleverna får en vecka på sig att lösa ett problem kan

de diskutera det med varandra, med föräldrar och lärare. Vi får många positiva reaktioner från föräldrar och andra lärare på hur ivriga och engagerade eleverna blir när de försöker lösa problemen. Fastän vi inte presenterar Lösningsstrategier som ska användas, inser många elever att man i några av problemen ska söka efter mönster.

Efter veckan återkommer eleverna med sina lösningar och med en redogörelse för vad de tänkt på när de arbetade med problemet. När eleverna har diskuterat och jämfört lösningar i par diskuteras lösningar och strategier i helklass. Vi försöker upptäcka dem som inte frivilligt vill berätta och lirkar vänligt med dem så att de delar med sig av sina tankar.

Här följer en beskrivning av hur elevernas strategier för att göra en sammanställning och deras sökande efter mönster gav oss möjlighet att gripa oss an algebra.

Ett av de första lyckade problemen utvecklades ur en klassdiskussion. Problemet var ursprungligen tänkt att hålla eleverna sysselsatta medan lärarna arbetade med administrativa uppgifter. Dess möjligheter visade sig helt och hållet av en slump.

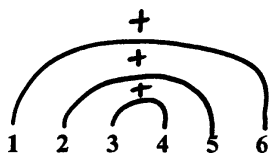
Frances R. Curcio undervisar vid New York University. **Barbara Nimerofsky** och **Rosanna Perez** undervisar vid Louis Armstrong Middle School, East Elmhurst, NY. **Shirel Yaloz** undervisar vid Hunter College High School, New York.

Artikeln var publicerad i *Mathematics Teaching in the Middle School*, februari 1997, och publiceras här med tillåtelse från författarna och NCTM. Bearbetad översättning av redaktionen.

Hur många prickar har en vanlig sexsidig tärning?

Ingen av oss hade förutsett de rika möjligheter som fanns i detta enkla, till synes icke-utmanande problem. (Läs mer om att förändra enkla händelser till extraordinära möjligheter i Silver, Kilpatrick & Schlesinger (1990), 25 – 39.)

Eleverna diskuterade och arbetade med problemet. Många adderade talen 1 till och med 6 och fick 21. Juan lade märke till att prickarna på motstående sidor på en tärning har summan 7 och att tärningen har tre sådana par av sidor. Därför är, enligt Juan, summan av prickarna 21. Det hade sen varit lätt för oss att gå vidare till nästa planerade aktivitet, men Tawanna ville visa summorna på tavlan.



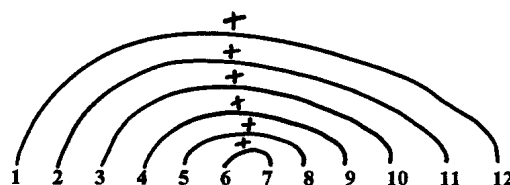
Efter att ha diskuterat detta tämligen enkla problem frågade vi klassen, i linje med vår idé om att analysera problemen, hur vi skulle kunna förändra det. Terik berättade att han hade tärningar med fler än sex sidor, men att de inte hade prickar utan tal. Han hade bl a en 12-sidig och en 20-sidig tärning. Vi utnyttjade då detta tillfälle att introducera några ord – Terik hade en dodekaeder och en ikosaeder. Samantha berättade upphetsat att hon hade en 100-sidig tärning! Under de följande lektionerna tog eleverna med sig tärningarna och visade klassen. Som svar på vår förfrågan om att förändra problemet, föreslog Chip:

Tabell 1

Sidor	Talen	Genväg	Summa
4	1+2+3+4	2·5	10
6	1+2+3+4+5+6	3·7	21
8	1+2+3+4+5+6+7+8	4·9	36
10	1+2+3+4+5+6+7+8+9+10	5·11	55
12	1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12	6·13	78
	⋮		
20	1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12 +13+14+15+16+17+18+19+20	10·21	210

Hur stor är summan på en 12-sidig tärning?

Många elever angrep problemet som om det inte hade någon relation till det ursprungliga problemet. Några gjorde däremot en koppling och föreslog att man skulle para ihop talen och multiplicera med antalet par, dvs $6 \cdot 13 = 78$.



Vi frågade nu om någon gjort några iakttagelser. Kristin föreslog: *Det största antalet prickar på en tärning med 12 sidor är 12. Parsumman är då $12+1$, 13.*

Eleverna fick sen fundera ut summan på en ikosaedertärning. De flesta såg likheten mellan det nya problemet och problemet med dodekaedertärningen. Genom att utgå från Kristins observation svarade George omedelbart att summan av de tjugotalen var 210, dvs $10 \cdot (20 + 1)$. Flera höll med och fann förenklingar: $20/2 =$ antalet par med summan 21, och därefter $10 \cdot 21 = 210$.

I resonemanget fick klassen leta efter likheter och skillnader i metoder och förklara varför vissa strategier var begripliga och varför andra inte var det. Eleverna fick därefter i uppgift att sammanställa informationen från de tre problemen i en tabell för att se om de fann något mönster. Vi bad dem att också tänka på tärningar med annat antal sidor än 6, 12, och 20 och att ta med dessa i sin analys. (tabell 1).

Finns det ett sätt att beskriva summan av talen på en tärning med vilket antal sidor som helst, dvs en tärning med n sidor?

Kristin modifierade sin iakttagelse och gjorde ett antagande:

Det största antalet prickar på en tärning med n sidor är n . Parsumman är $n + 1$. På vilken tärning som helst är parsumman ett mer än antalet sidor.

Kamraterna bad Kristin att ge några exempel för att de skulle få hjälp att förstå vad hon sa. Hon gick igenom exemplen med kuben, dodekaedern och ikosaedern. Eleverna utmanades att uttrycka relationen mellan antalet sidor och summan av parernas tal som en multiplikation.

Samantha hade ju berättat för klassen att hon hade en tärning med 100 sidor, så vi bad var och en att försöka räkna ut summan av talen på en tärning med 100 sidor. Eleverna tillämpade det de upptäckt i de tidigare exemplen och beräknade summan till 5050.

Vi berättade sen historien om den tyske matematikern Carl Friedrich Gauss, som i småskolan beräknade summan av talen 1-100 på några sekunder och frågade klassen hur Gauss hade kunnat beräkna en sådan summa så snabbt. De jämförde med det mönster de upptäckt. Aha! Mönsters kraft och matematikens kraft! Sen återvände vi till tabellen och lät eleverna lägga till en analys av en 100-sidig tärning och en tärning med n sidor. (tabell 2)

Generaliseringen av mönstret, $(n/2)(n+1)$, framstår nu inte som något magiskt.

Först uttrycker eleverna relationerna i ord, på tavlan eller i skrivhäftet: "För att få summan av talen på en tärning ska man dividera antalet sidor med två och multiplicera det med antalet sidor plus 1." Eleverna översätter "dividera antalet sidor med 2" med " $n/2$ " och multiplicera det med "antalet sidor plus 1" med " $n + 1$ ". Implicit i detta arbete är "det algebraiska språket", som utvecklas i ett meningsfullt sammanhang via problemlösning. Korrekt hantering av parenteser kommer efter hand.

I början skriver eleverna sina egna symboluttryck för att uttrycka operationernas ordning.

Monique fortsatte att variera problemet.

Kan en tärning ha ett udda antal sidor, och vad händer i så fall?

Livlig diskussion utbröt om hur en sådan tärning skulle kunna se ut. Eleverna ville konstruera polyedrar med olika antal sidor och skriva tal på sidorna för att illustrera och testa Kristins antagande. Andra elever ville veta om en sådan tärning skulle vara en rättvis tärning – dvs skulle alla sidor ha lika stor chans att komma upp?

Intresset var så stort och möjligheterna att fortsätta de rika diskussionerna så lovande att vi ägnade oss åt detta åtskilliga dagar. Eleverna fick som hemuppgift att fundera över hur vi skulle beräkna summan av talen på en tärning med udda antal sidor. Fastän ingen kunde hitta en regelbunden tärning med udda antal sidor – och i verkligheten finns det inga – började

Tabell 2

Sidor	Talen	Genväg	Summa
4	1+2+3+4	2·5	10
6	1+2+3+4+5+6	3·7	21
8	1+2+3+4+5+6+7+8	4·9	36
	⋮		
20	1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12 +13+14+15+16+17+18+19+20	10·21	210
100		50·101	5050
n		$(n/2)(n+1)$	$(n/2)(n+1)$

Sidor	Talen	Genväg	Summa
3	1+2+3	3·2	6
5	1+2+3+4+5	5·3	15
7	1+2+3+4+5+6+7	7·4	28
9	1+2+3+4+5+6+7+8+9	9·5	45
11	1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11	11·6	66
	⋮		
n		$n(n+1)/2$	$n(n+1)/2$

Tabell 3

eleverna dagen därpå göra en tabell för att analysera det nya problemet. (tabell 3)

När eleverna försökte finna förenklingar för att addera ett udda antal på varandra följande tal formulerade Chip följande antagande:

För att finna mittersta talet när antalet är udda, ska man dividera antalet med 2 och lägga till resten (dvs 1) till heltalssvaret. Klassen bad honom om några exempel.

”Om man tar 7, så han, är 4 talet mitt emellan 1 och 7, eftersom $7/2 = 3$ rest 1, och $3 + 1 = 4$. Talet mitt emellan 1 och 13 är 7, eftersom $13/2 = 6$ rest 1, och $6 + 1 = 7$. Talet mellan 1 och 21 är 11, eftersom $21/2 = 10$ rest 1, och $10 + 1 = 11$.” Chips idé dök upp igen vid ett senare tillfälle när vi diskuterade begreppet median. Nick analyserade Chips antagande och situationen och föreslog:

Varje udda tal är lika med summan av två ”granntal” (dvs på varandra följande tal). Det större av de två talen är det mittersta talet för det udda antalet tal.

Gissa om Chip blev bombarderad med frågor från klasskamraterna! De bad om exempel. ”Om man tar 7”, förklarade Chip tryggt, ”så är 7 lika med $3 + 4$, så 4 är talet mitt emellan 1 och 7. $13 = 6 + 7$, så 7 är talet mitt emellan 1 och 13; $21 = 10 + 11$, så 11 är talet mitt emellan 1 och 21”.

Kristin formulerade då nästa antagande:

För att få summan av ett udda antal heltal, ska man hitta det mittersta talet och multiplicera det med antalet tal.

Återigen ville klassen ha exempel. Kristin sa att man för att få summan av heltalen från 1 till och med 7, ska ta mittentalet 4,

med Chips eller Nicks metod, och multiplicera det med antalet tal. Så för 7 blir det $7 \cdot 4 = 28$.

För att följa upp denna spännande upptäckt bad vi de elever som formulerat antaganden att skriva ner dem på stora papper som de satte upp i klassrummet för framtida bruk.



Hur mycket kostar pärlorna?

På en tråd sitter den största pärlan i mitten och de minsta längst ut. De minsta kostar 1 krona, nästa i storlek kostar 2 kr, tredje pärlan kostar 3 kr osv. Figuren visar en tråd med nio pärlor och kostnaden för var och en. Hur mycket skulle en tråd med 25 pärlor kosta, om den var uppträdd efter samma princip?

(Szetela 1987, 37)

Alla elever kom efter en vecka tillbaka med en bild av 25 pärlor. Några beskrev hur de adderade alla belopp, några räknade på papper och några använde miniräknare. Några elever adderade bara ena sidan av pärltråden, från 1 till och med 12, dubblade summan och la till 13. De olika strategierna diskuterades i klassen. Eleverna fick möjlighet att ventilerat likheter och skillnader i de beskrivna metoderna. Vi bad dem att jämföra tråden med nio pärlor, som kostade 25 kr, med tråden med 25 pärlor som kostade 169 kr.

Stephanie sa ” $9 = 3 \cdot 3$ och $25 = 5 \cdot 5$. Alla pärlor kan delas upp i sig själva.” För de flesta i klassen var hennes observation obegriplig. Efter att ha tänkt en stund och genom att angripa det på ett annat sätt, men inspirerad av Stephanies något inexakta idé, noterade Simone att 25 är $5 \cdot 5$ och 169 är $13 \cdot 13$. Christine byggde vidare på Simones idé och tillade att den dyraste pärlan i mitten på niopärlstråden kostade 5 kr och att den dyraste på tjugofempärlstråden kostade 13 kr. Eleverna utmanades att undersöka om relationen mellan mittenpärlan och kostnaden var densamma för andra pärlstrådar. Jeffrey föreslog att vi skulle göra en tabell. Tillsammans upprättade klassen tabell 4.

Då John såg mönstret föreslog han: ”bara vi vet mittenpärlan kan vi få kostnaden genom att multiplicera den med sig själv”. Vi introducerade då begreppet kvadrering. Flera elever kunde förklara innebörden och skriva beteckningen på tavlan, $5 \cdot 5 = 5^2 = 25$. Vi blev dock inte förvånade när vi i diskussionen märkte att några barn blandade ihop kvadrering med dubbling (Curcio och Zarnowski 1996).

Chip och Nick påminde klassen om att de kunde hitta det mittersta av ett udda antal tal med hjälp av sin hypotes från tärningsproblemet, som fortfarande satt uppsatt i klassrummet. Brian antog:

För att få kostnaden för en tråd med pärlor ska man lägga till 1 till antalet pärlor, dividera med 2 för att få mittpärlan och sen multiplicera mittpärlan med sig själv.

För att översätta Brians antagande till symboler skrev flera elever $((n + 1)/2)^2$.

Vi blir nu inte besvikna om inte alla klarar att uttrycka relationen i symbolform. Vi inser att våra elever befinner sig på olika utvecklingsnivåer och uppmuntrar och hjälper dem att bygga på sin förståelse.

Eleverna vet att när vi har löst ett problem är det verkligen inte ”klart”. Vi vill alltid veta ”Hur kan vi förändra problemet?”

Dong lade i det ursprungliga problemet märke till att tråden hade ett udda antal pärlor. Hon väckte frågan:

Skulle det kunna vara ett jämnt antal pärlor? Skulle mönstret blivit detsamma?

Eleverna tog sig an det nya problemet och gemensamt konstruerade några en tabell på tavlan. (tabell 5)

Nicole såg ett mönster och föreslog:

När vi vet de två i mitten lägger vi till 1 och multiplicerar.

Klassen behövde lite hjälp med detta.

Nicole sa, ”Ta 6, mittentalen är 3 och $3 \cdot 4 = 12$. Ta 8, mittentalen är 4 och $4 \cdot 5 = 20$.”

George sa, ”Jag slår vad om att du tänker fråga oss hur det blir om vi har n pärlor.” Ja, naturligtvis. Eleverna fick i uppgift att översätta Nicoles antagande till symboler. Flera gick fram till tavlan och skrev $(n / 2) \cdot ((n / 2) + 1)$.

Rachel sköt in att hon hade en annan idé:

Tabell 4

Antal pärlor	Diagram	Mitt-pärla	Pris
3	1 2 1	2	4
5	1 2 3 2 1	3	9
7	1 2 3 4 3 2 1	4	16
9	1 2 3 4 5 4 3 2 1	5	25
11	1 2 3 4 5 6 5 4 3 2 1	6	36
13	1 2 3 4 5 6 7 6 5 4 3 2 1	7	49
	...		
25	1 2 3 4 5 ... 13 ... 5 4 3 2 1	13	169
n		$(n+1)/2$	$((n+1)/2)^2$

Antal pärlor	Diagram	Mitt-pärla	Pris
2	1 1	1	2
4	1 2 2 1	2	6
6	1 2 3 3 2 1	3	12
8	1 2 3 4 4 3 2 1	4	20
10	1 2 3 4 5 5 4 3 2 1	5	30
12	1 2 3 4 5 6 6 5 4 3 2 1	6	42
n	$\vdots$	$(n/2)$	$(n/2)((n/2)+1)$

Tabell 5

Varför inte sätta de dyraste pärlorna längst ut på tråden?

Så fick vi ett nytt problem! Eleverna analyserade Rachels problem och gjorde generaliseringar utifrån de mönster de upptäckte. (tabell 6)

Samtal med och mellan elever om antaganden och exempel är vanligt i våra klasser. Eleverna skapar mening, utmanar varandras tänkande, utvecklar förmågan att lösa problem och det algebraiska tänkandet. Ett spännande sätt att undervisa i matematik!

Vi fortsätter att söka efter otraditionella problem för att utmana våra elever. Ofta skapar eleverna nya problem, precis som Rachel.

Det händer att vi presenterar ett problem som är isomorft (till sin struktur identiskt) med ett tidigare, bara för att undersöka om eleverna kan se problemens underliggande likheter och om de kan tillämpa den generalisering som kommit till stånd tidigare. Vi blir mycket lyckliga när eleverna ser likheterna.

Avslutande kommentarer

Vi har försökt att fånga den glädje och entusiasm som genereras när eleverna får lösa problem, upptäcka mönster och göra antaganden när de utvecklar sin förmåga att resonera algebraiskt. Tro dock inte att vi kan trola. Det går åt mycket tid, tålamod och energi, och det vi har beskrivit här tog månader att utveckla.

Elever befinner sig på olika nivå när det gäller förståelse, och vi försöker ge näring åt deras utveckling. Många missuppfattningar och svårigheter kan avslöjas när eleverna delar med sig av sitt tänkande. Vår utmaning har varit att utifrån dessa situationer skapa inlärningstillfällen. Ibland upptäcker eleverna mönster och relationer som är nya för oss. (Curcio & Stewart 1992). Alla elever förväntas delta och de har ansvar för att delge sina tankar om varje problem. Även våra elever som har svårt med matematik, kan tryggt berätta om sina idéer. Vi har valt att här visa det slutliga resultatet av våra diskussioner. Vissa tankar och idéer leder in i en återvändsgränd, men vi

Tabell 6

Antal pärlor	Diagram	Pris
3	2 1 2	5
5	3 2 1 2 3	11
7	4 3 2 1 2 3 4	19
9	5 4 3 2 1 2 3 4 5	29
11	6 5 4 3 2 1 2 3 4 5 6	41
13	7 6 5 4 3 2 1 2 3 4 5 6 7	55
n	$\vdots$	$((n+1)/2)((n+1)/2-1) + n$

avfärdar inte några – alla presenteras för klassen, och eleverna resonerar med varandra för att avgöra rimligheten i förklaringarna.

Vi är mycket försiktiga så att vi inte vilseleder eleverna att tro att exempel som stödjer ett antagande är ett matematiskt bevis. De ska inse att om man finner ett motexempel så upphäver det ett antagan-

de. Vi tror att man med elever i denna ålder ska arbeta induktivt med att generalisera mönster ur vissa exempel, för att ge meningsfulla erfarenheter till dem när de börjar utveckla algebraiskt och symboliskt resonemang. Vi ser fram emot att se hur eleverna på gymnasienivå kommer att bygga upp formella matematiska bevis, utifrån den grund vi lagt.

Några problem vi använt

1. Eric och hans 6 kamrater var på tivoli. I slutet av dagen skulle de åka berg- och dalbana två och två, på så sätt att alla skulle få åka exakt en gång med alla de andra. Hur många åkturer krävdes?
2. Ett vägsystem ska byggas mellan ett antal städer. Hur många vägar behövs för 12 städer, om varje väg bara kan förena 2 städer?
3. En rik granne, uppenbarligen intresserad av matematik, gav Samantha ett erbjudande om att måla huset på 19 dagar. Hon kunde antingen få 5000 kr som engångssumma eller 1 öre första dagen, dubbelt så mycket andra dagen och så vidare med dubbelt för varje dag. Hur skulle hon välja?
4. Benny ska starta en dataklubb. Han är själv den enda medlemmen nu, men hans plan är att varje medlem ska skaffa 2 nya medlemmar varje månad. Hur många medlemmar kommer klubben att ha efter 12 månader, om hans plan fungerar?
5. Hur många kvadrater, av alla olika storlekar, har ett vanligt schackbräde?

Problemen är hämtade från O'Daffer (1984) och (1985).

Referenser

- Algebra for the Twenty-first Century: Proceedings of the August 1992 Conference. Reston, Va.: The Council, 1992.
- Curcio, F. R. & Stewart, B. (1992). Readers' Dialogue: Meeting the Challenge. *Arithmetic Teacher* 39. (January): 2, 13, 40.
- Curcio, F. R. & Zarnowski, M. (1996). Links to Literature: Revisiting the Powers of 2. *Teaching Children Mathematics* 2 (January): 300-304.
- LeBlanc, J. F., Proudfit, L. & Putt I. J. (1980). Teaching Problem Solving in the Elementary School. In *Problem Solving in School Mathematics, 1980 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics*, edited by Stephen Krulik, 104-16. Reston, Va.: The Council.
- National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston, Va.: The Council.
- National Council of Teachers of Mathematics. (1991). Patterns and Functions. *Addenda Series, Grades 5-8*. Reston, Va.
- O'Daffer, P. G. (1984, 1985). Problem Solving: Tips for Teachers: Strategy Spotlight – Make a Table. *Arithmetic Teacher* 32 (1984): 46-47.
- Problem Solving: Tips for Teachers: Strategy Spotlight – Find a Pattern. *Arithmetic Teacher* 32 (January -85): 34-35.
- Problem Solving: Tips for Teachers: Strategy Spotlight – Solve a Simpler Problem. *Arithmetic Teacher* 32 (March -85) 34-35.
- Silver, E. A. (1997). On My Mind: 'Algebra for All' – Increasing Student Access to Algebraic Ideas, Not Just Algebra Courses. *Mathematics Teaching in the Middle School* 2 (February): 204-207.
- Silver, E. A., Kilpatrick, J. & Schlesinger, B. (1990). *Thinking through Mathematics: Fostering Inquiry and Communication in Mathematics Classrooms*. New York: College Board.
- Szetela, W. (1987). The Problem of Evaluation in Problem Solving: Can We Find Solutions? *Arithmetic Teacher* 35 (November): 36-41.