KERSTIN HAGLAND

Buss på ekvationen!

Bara ordet ekvation kan få många, både elever och vuxna, att direkt tänka på något som är svårt och obegripligt. I artikeln presenterar författaren några idéer om hur man skulle kunna avdramatisera detta begrepp i undervisningen. Det finns möjligheter till historisk anknytning och på Nämnaren på nätet finns några relaterade länkar.

Säger man ordet ekvation brukar tyvärr många människor börja flacka lite osäkert med blicken. De tycker sig ha en vag aning om vad det handlar om, något med bokstaven x och kanske någon sorts formel med p och q som man måste kunna utantill, annars är det kört. Och hur var det nu, skulle bokstaven y också vara med?

Här är några förslag på hur man skulle kunna avdramatisera ekvationen en smula och samtidigt jämna vägen för en god uppfattning om begreppet genom att undvika en del onödiga fallgropar.

Första fallgropen: ordet ekvation väcker ångest

Låt oss ta tjuren vid hornen och börja med en definition. Vad är en ekvation? Så här står det i Nationalencyklopedien Junior (2008a):

> ekvation är en matematisk uppställning eller ett räknestycke med två *sidor* eller *led*, som är lika stora. De två sidorna skiljs åt av ett *likhetstecken* (=). Talen på de olika sidorna kan skrivas ut, om man känner till dem. Här är ett exempel:
>
> $2 + 2 = 3 + 1$
>
> Två plus två är fyra, och tre plus ett är också fyra. Det två leden är lika stora.
>
> Men för det mesta innehåller ekvationen ett eller flera *okända* tal, som man betecknar med bokstäver, oftast x, y eller z. Exempel: $2 \cdot x = 6$. Man kan lösa den ekvationen genom att dela 6 med 2. Då får man 3. Alltså är $x = 3$. Två gånger tre är faktiskt sex. Det går också att lösa ekvationer med flera okända.

Ordet ekvation kommer av latinets *aequatio* vars verbform *aequare* betyder ”göra lika” (Nationalencyklopedien, 2008b). Ekvation står alltså för likhet. Ett närbesläktat ord är ekvator (lika avstånd till polerna). Och det ordet ger väl knappast någon människa rysningar av obehag?

Mitt förslag är därför att man varje gång ”ekvationsångesten” sätter in tänker på ordet ekvator och inser att ekvation är ett lika ofarligt ord. Man kan ju tillfälligt också byta ut ordet ekvation mot ordet likhet. ”Idag ska vi jobba med likheter!” låter väl inte precis skrämmande, eller hur? När man väl har insett den enkla innebörden kan man förhoppningsvis använda ordet utan någon negativ laddning.

Andra fallgropen: missuppfattning av likhetstecknet

Alla ekvationer innehåller ett likhetstecken. För att förstå och kunna ta sig an en ekvation måste man alltså kunna använda och tolka likhetstecknet på ett korrekt sätt. Likhetstecken är ju ett matematiskt tecken som visar att två matematiska uttryck som står på varsin sida om tecknet har samma värde (Nationalencyklopedien, 2008c). Likhetstecknet betyder alltså ”är lika med”, ”är lika mycket som” eller liknande.

Att likhetstecknet ändå ofta tolkas som ”blir” tror jag beror på att många, både barn och vuxna, utnyttjar likhetstecknet under en pågående räkneoperation, en procedur som vandrar iväg i läsriktningen från vänster till höger och avslutas med ett korrekt ”svar”. Ofta frågar man sig till exempel hur mycket *blir* 6 + 3? Och svarar: Det *blir* 9. Inte konstigt då om 6 + 3 = 9 tolkas som ”sex plus tre *blir* nio”. Sådana räkneoperationer kan även förekomma inom mer avancerad matematiktill exempel när man förenklar algebraiska uttryck:

$$4a + 5b - c - 3a - 8b + c = a - 3b$$

Det längre uttrycket till vänster förenklas och ”blir” till det högra.

Men om man tror att likhetstecknet betyder ”blir” kan till exempel följande uppgift te sig fullkomligt obegriplig:

Bestäm x om
$4x - 3 = 2x + 5$

Hur kan $4x$ plötsligt ”bli” $2x$, vart tog de andra två x-en vägen? Och hur kan – 3 plötsligt ”bli” + 5? Och hur kan man bestämma x genom att veta det?

Om man däremot har förstått att likhetstecknet betyder att uttrycket till vänster ”är lika mycket som” uttrycket till höger kan man arbeta precis som med en balansvåg och börja ordna och förenkla, till exempel så här:

Addera med 3 på varje sida om likhetstecknet:

$$4x - 3 + 3 = 2x + 5 + 3$$
$$4x = 2x + 8$$

Subtrahera med $2x$ på varje sida om likhetstecknet:

$$4x - 2x = 2x - 2x + 8$$
$$2x = 8$$

Dividera med 2 på varje sida om likhetstecknet:

$$\frac{2x}{2} = \frac{8}{2}$$
$$x = 4$$

Nu har man ordnat och förenklat så långt det går och därigenom också fått fram ett värde på x.

Mitt förslag är att man tidigt försöker lyfta fram och förtydliga den grundläggande betydelsen av likhetstecknet så att den inte glöms bort och att likhetstecknet missuppfattas. Man kan exempelvis bjuda på räkneuppgifter av det har slaget:

Vad ska det stå i de tomma rutorna?

$\square + 8 = 4 + 9$

$20 = 24 - \square$

$4 \cdot 3 = \square \cdot 6$

I de här exemplen måste den som löser uppgifterna jämföra de matematiska uttrycken på båda sidor om likhetstecknet för att kunna lösa gåtan om hur man ska få uttrycken att ”väga jämnt”. Förhoppningsvis är det inte så mycket svårare för eleverna att lösa sådana här uppgifter än de traditionella i läsriktningen. En sak är jag helt övertygad om: när eleverna har lärt sig att se mer översiktligt på matematiska uttryck på detta sätt är mycket vunnet inför det fortsatta matematiklärandet.

Via denna ”balansvågsmetod” kan man även använda ett lite mer kreativt arbetssätt. Man kan till exempel ge eleverna öppna uppgifter som den här:

Vad kan det stå till höger om likhetstecknet?

$17 =$

I sådana skapande uppgifter försöker ju elever ofta lägga sig antingen på en så svår nivå de bara kan för att imponera eller så vill de göra något lite lustigt och originellt av det hela. Om du provar i klassrummet, var beredd på överraskningar! Tillsammans kan eleverna säkert bjuda på en hel pallett med olika matematiska uttryck som alla har det gemensamt att de är lika mycket som 17. Hela tavlan blir väldigt lätt ”full i sjutton”! Och här kan eleverna verkligen utgöra resurser för varandra i matematiklärandet. Uppgiften kan i sig också vara ett bra sätt att diagnostisera enskilda elevers matematikkunskaper. Vilka tal använder de sig av? Vilka räknesätt? Här är exempel på några sådana elevlösningar:

$17 = 1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1$

$17 = 20 – 3$

$17 = 21 – 4$

$17 = 22 – 5$

$17 = 17$

$17 = 17 + 17 – 17$

$17 = 2 + \frac{45}{3}$

$17 = 0{,}5 \cdot 34$

Om man vill kan man som lärare införa olika begränsningar och krav på lösningarna, exempelvis vilka räknesätt och typer av tal som får finnas med. Svårighetsgraden kan varieras beroende på vilka elever man har. Några exempel:

Vad kan det stå till höger om likhetstecknet?

17 =

- Använd subtraktion minst en gång
- Använd två olika räknesätt
- Minst ett tal måsta vara i bråkform
- Använd minst två tal större än 50 och multiplikation eller division

Tänk vilken aha-upplevelse det skulle kunna bli om en elev själv inser till exempel detta samband:

$22 – 5 = 2 + \frac{45}{3}$

Har eleven väl förstått likhetstecknets betydelse kan han eller hon mycket väl även snart inse att man faktiskt till exempel kan ta bort lika mycket på varje sida om likhetstecknet och ändå hålla de två uttrycken i perfekt balans, precis som när man använder en balansvåg:

$20 – 5 = \frac{45}{3}$

$15 = \frac{45}{3}$

Sådana här förenklingar är mycket vanliga vid ekvationslösning och varför inte börja träna det tidigt? Matematik går ju i hög grad ut på att förenkla för sig och det borde fler barn och vuxna får chansen att upptäcka, uppleva och glädjas åt, tycker jag.

Tredje fallgropen: symbolen x undviks

Ofta undviks den matematiska symbolen *x* när man undervisar yngre elever. Istället inför man icke-matematiska tecken som _ eller en tom ruta att fylla i □ (som jag gjorde nyss), när man vill antyda att det finns ett ännu okänt tal som eleverna bör fastställa.

Varför inför man tillfälliga tecken när man lika väl skulle kunna använda ett korrekt matematiskt tecken på en gång, kan man fråga sig. Alla barn vet ju faktiskt redan att *x* brukar stå för något hemligt eller okänt, det har de läst om i spännande böcker eller serietidningar eller sett på film. Det finns därför faktiskt ofta också ett skimmer av lustfylld spänning kring bokstaven *x*. Varför inte utnyttja den positiva attityden?

Mitt förslag är därför att man provar att införa *x* tidigt. Jag tror inte det skulle bli några problem för eleverna att komma ihåg att använda just bokstaven *x* som symbol för det okända talet. Jag tror tvärtom att eleverna till och med kan tycka det vore ganska lustfyllt att få vara ”taldetektiver” som ”avslöjar” *x*. Inte tror jag heller att de får särskilt svårt att lösa uppgifter som exempelvis denna:

Talet *x* är ett hemligt tal. Vilket tal är *x*?

$20 = 32 – x$

För att undvika missförstånd bör man, tycker jag, dessutom låta bli att använda × som multiplikationstecken. Använd istället upphöjd punkt. En del miniräknare kan ha × som symbol för multiplikation. Då kan det förstås vara bra om man är extra tydlig inför eleverna hur man egentligen skriver ett korrekt multiplikationstecken. Man kan för övrigt ägna en stund åt att syna alla tecknen på miniräknaren. Där förekommer ju ofta avvikande symboler även för exempelvis division och decimaltecken.

Det kan också vara bra att låta eleverna möta *olika* bokstäver som ”hemliga tal” för att göra klart för dem att det inte nödvändigtvis måste vara ett x utan att man lika gärna kan använda andra bokstäver.

Talen a och b är två hemliga tal.
Men vi vet att
$a + b = 17$
och
$a – b = 7$
Vilket tal är *a?* Vilket tal är *b?*

Vad kan vi lära av historien?

Flera forskare hävdar att mänsklighetens utveckling i matematik också är varje individs naturliga utveckling i matematik. Det betyder med andra ord att matematikhistorien skulle kunna ge oss en tydlig vink om i vilken ordning matematiklärandet bör ske för varje individ.

När dök då ekvationen upp i matematikhistorien? Svaret är att den kom väldigt tidigt. Redan babylonier och egyptier arbetade med ekvationer för ca 4000 år sedan och då inte bara med de allra enklaste utan även med mer komplicerade.

Ett typiskt egyptiskt problem från den här tiden var följande:

Ett tal och dess fjärdedel är tillsammans 15.
Vilket är talet?

Problemet har en obekant som ska avslöjas, talet.

Den egyptiske skrivaren Ahmes anses ha löst ekvationen genom att först prova med ett svar som han från början visste var fel (metoden kallas ”enkel falsk position”). Han valde 4 för det gjorde det lätt för honom att räkna, eftersom 4/4 = 1. Om talet är 4 så är talet tillsammans med sin fjärdedel $(4 + 1) = 5$.

Men detta är ju inte den rätta summan, den var ju 15. 15 är dock samma sak som $3 \cdot 5$ så om han multiplicerade sitt falska svar 4 med 3, så hittade han det rätta svaret. $3 \cdot 4 = 12$. 12 borde därmed vara det rätta svaret. Slutligen kontrollerade han sin uträkning:

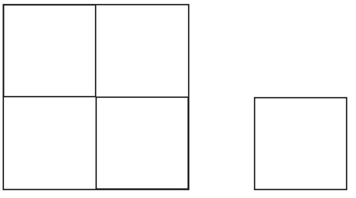
$$12 + \frac{12}{4} = 15$$

$$12 + 3 = 15.$$

Det stämmer. Talet är 12.

Han utnyttjade alltså en sorts *förhållanderäkning.* Det falska svaret förhöll sig ju till den falska summan som det korrekta svaret förhöll sig till den korrekta summan.

En del forskare anser dock att Ahmes istället tänkte sig metoden som så att han först delade det sökta talet i fyra lika stora delar, för det handlade om fjärdedelar. Sedan räknade han talet och dess extra fjärdedel som fem sådana delar. Varje del måste då vara 3, eftersom fem delar skulle motsvara 15 och $\frac{15}{5} = 3$. Fyra sådana delar motsvarar då $4 \cdot 3 = 12$. Talet är 12.



En bild av talet och dess fjärdedel.

Kanske vore det värt att prova detta klassiska problem i klassrummet och få följa elevernas tankar fram till en lösning? Tänker eleverna ”egyptiskt”? Eller hur går de tillväga för att hitta sin lösning?

Ett babyloniskt problem från ungefär samma tid är följande som handlar om en rektangel:

Jag har multiplicerat längden med bredden för att finna arean.
Resultatet blev 182.
Därefter har jag adderat längd och bredd och fått 27.

Finn längd, bredd och area.

Problemet har två obekanta tal som ska avslöjas, rektangelns längd och rektangelns bredd (arean är ju redan bestämd).

Hur löste då babylonierna detta problem? Jo, de letade först i sina färdigskrivna tabeller. De konstaterade i ”kvadrattabellen” att rektangeln inte var någon heltalskvadrat.

Närmast arean 182 hittade de en kvadrat med sidan 13 och arean 169 och en kvadrat med sidan 14 och arean 196. Då gissade de på en rektangel med bredden 13 och längden 14, kontrollerade och konstaterade att det stämde.

Ett matematiskt liknande nutida problem skulle kunna se ut så här:

> Summan av två tal är 8.
> Produkten av samma tal är 15.
> Vilka är de två talen?

Kanske vore det problemet också värt att prova i klassrummet? Tänker eleverna "babyloniskt"? Provar de med 4 · 4 först? Gissar de smart?

Hur fortsatte det sedan? Den grekiske matematikern Diofantos levde på 200-talet e Kr. Han utvecklade algebran på babylonisk grund. Han löste liknande ekvationer fast på ett mer abstrakt och generellt sätt. Han införde symboler för de okända talen. Här är ett exempel:

> Tänk dig att $y + z = 10$ och $yz = 9$.
> Vilka tal är y och z?

Diofantos löste sitt problem genom att tillfälligt låna in bokstaven x. Han bestämde att x fick beteckna halva skillnaden mellan talen y och z vilket kan skrivas:

$$y - z = 2x$$

Han adderade sedan detta uttryck på ömse sidor i ekvationen $y + z = 10$:

$$\begin{aligned} y + z + (y - z) &= 10 + 2x \\ 2y &= 10 + 2x \\ y &= 5 + x \end{aligned}$$

Sedan subtraherade han samma uttryck på ömse sidor i ekvationen $y + z = 10$:

$$\begin{aligned} y + z - (y - z) &= 10 - 2x \\ 2z &= 10 - 2x \\ z &= 5 - x \end{aligned}$$

Därefter satte han in dessa värden på y och z i ekvationen $yz = 9$:

$$\begin{aligned} (5 + x)(5 - x) &= 9 \\ 25 - x^2 &= 9 \\ x^2 &= 16 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

De negativa talen var inte "uppfunna" på den här tiden så därför bortser vi från lösningen $x = -4$

Värdet på x satte han sedan in i ekvationerna $y = 5 + x$ och $z = 5 - x$ och fick på så sätt fram värdena på y och z:

$$\begin{aligned} y &= 5 + 4 \\ y &= 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z &= 5 - 4 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Hur skulle t ex dagens gymnasieelever lösa Diofantos problem? Kommer de att "låna in" en bokstav till eller löser de problemet på babyloniskt sätt? Kommer de att översätta de abstrakta uttrycken till ord som i det föregående problemet och sedan gissa sig fram? Det vore intressant att ta reda på. Prova gärna själv Diofantos abstrakta och generella lösningsmetod på det problemet!

Kanske kan dessa historiska exempel lära oss att om eleverna får tillfälle att bekanta sig med förhållanderäkning, rita bilder som tankestöd och öva sig i att göra smarta gissningar kan de därmed också bli väl förberedda för ett mer modernt sätt att lösa ekvationer med en eller flera obekanta.

LITTERATUR

Nationalencyklopedin (2008a). Ekvation. www.ne.se/jsp/search/article.jsp?i_art_id=712644

Nationalencyklopedin (2008b). Ekvation. www.ne.se/jsp/search/article.jsp?i_art_id=160409

Nationalencyklopedin (2008c). Likhetstecken. www.ne.se/jsp/search/article.jsp?i_art_id=O229016

O'Connor, J. J. & Robertson, E. F. (2000) *History Topics:*
Ancient Egyptian mathematics. www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Indexes/Egyptians.html
Babylonian mathematics. www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Indexes/Babylonians.html
Diophantus of Alexandria. www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Diophantus.html

Svege, E. & Thorvaldsen, S. *Algebraens historia* www.afl.hitos.no/mahist/algebra/

Alla ovanstående tillgängliga 2008-04-10.