Svante Silvén

Divisionsalgoritmer

om man förstår principen kan man använda vilken som helst

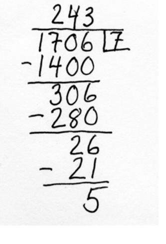
Av dem som jag har frågat, unga som gamla, lärare och elever, har endast några få kunnat förklara varför de olika divisionsalgoritmerna, stege, trappa, liggande stol osv är korrekta. Vilken algoritm som är bäst, enklast att handha, har ju stötts och blötts under decennier. Men om eleven förstår den gemensamma principen för all division, torde det spela mindre roll vilken algoritm eleven lär sig. Förklaringen är enkel och (naturligtvis) densamma för alla de olika algoritmerna. Ett enkelt exempel får visa bakgrunden. Låt oss beräkna $1706 \div 7$ först utvecklat och därefter med divisionsalgoritmer. Om du inte brukar använda någon av dessa, prova och jämför med den du är van vid och behärskar.

$$\frac{1706}{7} = \frac{1400+306}{7} = \frac{1400}{7} + \frac{306}{7} = \frac{200 \cdot 7}{7} + \frac{280+26}{7} =$$

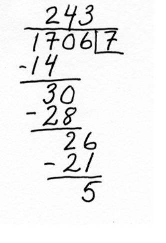
$$= 200 + \frac{40 \cdot 7}{7} + \frac{21+5}{7} = 200 + 40 + \frac{3 \cdot 7}{7} + \frac{5}{7} =$$

$$= 200 + 40 + 3 + \frac{5}{7} = 243 + \frac{5}{7}$$

Jämför nu ovanstående med en av divisionsalgoritmerna:



En kortare variant:



Nu kan man tydligt se att dessa algoritmer endast är kortare versioner av det förklarande exemplet ovan.

Att tänka matematiskt

Exemplet visar några drag i matematiskt tänkande – igenkänning och frihet att välja en bekväm och ändamålsenlig strategi:

- Man ser att division är ”omvänd” multiplikation, vilket innebär att man använder sig av något man kan sedan tidigare, något som man *känner igen*.
- Man har *frihet* eftersom man *får välja* en metod som passar en själv och situationen. I detta fall kan vi skriva om 1706 som 1400 + 306 eller annorlunda sagt, i täljaren skriva dit 1400 och sedan korrigera med + 306 så att vi behåller 1706. Så gör vi för att vi vet att 7 går jämnt upp i 1400.
- Man har lika stor rätt att skriva 1706 som t ex 1500 + 206, men det är opraktiskt! Det är inte heller fel att först skriva dit 700 och korrigera med 1006 och göra detta två gånger (vilket illustrerar vad multiplikation är), men det är *bekvämare* att gå direkt till 1400.
- Den första uppdelningen i exemplet upprepade vi i det andra steget. Att använda den metod som man redan har använt en gång eftersträvar matematiker med förkärlek, eftersom det ger mindre arbete och minskar risken för felaktigheter. Matematiker är ofta *ändamålsenligt lättjefulla!*

Fortsätt dividera

En naturlig fortsättning, för i första hand gymnasister, är att gå vidare och visa med polynomdivision.

$$\frac{p(x)}{x-1} = \frac{x^3-7x^2+4x+5}{x-1} = \frac{x^3-x^2-6x^2+4x+5}{x-1} =$$

$$= \frac{x^2(x-1)-6x^2+6x-2x+5}{x-1} = \frac{x^2(x-1)}{x-1} + \frac{-6(x-1)-2x+2+3}{x-1} =$$

$$= x^2 - \frac{6x(x-1)}{x-1} + \frac{-2(x-1)}{x-1} + \frac{3}{x-1}$$

Vi ser att resttermen är lika med 3. Om vi förlänger med $(x-1)$ får vi:

$$p(x) = x^3 – 7x^2 + 4x + 5 = (x-1)(x^2 – 6x – 2) + 3$$

Vi får då direkt att $p(1) = 3$, d v s för att få resttermens värde behöver man i polynomet endast sätta in $x = 1$.

Om vi hade låtit den konstanta termen i $p(x)$ vara 2 i stället för 5, så hade divisionen gått jämnt ut, resttermen hade blivit 0:

$$p(x) = x^3 – 7x^2 + 4x + 2 = (x-1)(x^2 – 6x – 2)$$

$p(1) = (1-1)(1^2 – 6 \cdot 1 – 2) = 0$, d v s $x = 1$ är ett nollställe till polynomet

om resttermen = 0. Vi har här ett exempel på *faktorteoremet*. Men resttermen behöver inte bli ett konstant tal:

$$\frac{x^4-5x^3+4x^2+7x-8}{x^2+1} = \frac{x^4+x^2-5x^3-5x+3x^2+12x-8}{x^2+1} =$$

$$= \frac{x^2(x^2+1)}{x^2+1} - \frac{5x(x^2+1)}{x^2+1} + \frac{3x^2+3+12x-11}{x^2+1} = x^2-5x+3+\frac{12x-11}{x^2+1}$$

Resten är här $12x – 11$, som alltså är skild från en konstant.

Med ovanstående som bakgrund kanske man kan säga:
Att dividera är inget att dividera om!