

Förståelse för tal i bråkform

Två lärarstudenter på HLK i Jönköping undersökte elevers förståelse för tal i bråkform. De såg att elever många gånger har likartade missuppfattningar. Här diskuterar de vilka strategier eleverna använder och hur undervisningen kan dra nytta av att känna till hur elever tänker om bråk.

Även om skolmatematiken är uppdelad under Centralt innehåll i kursplanen är de olika områdena inte oberoende utan snarare direkt beroende av varandra. Elevers förståelse för tal i bråkform är viktig för deras fortsatta matematiska utveckling och för en god algebraisk förståelse. Många av de missuppfattningar som elever har om tal i bråkform härstammar från missuppfattningar som uppstått redan i de tidiga skolåren.

Tal i bråkform kan utifrån ett del-helhetsperspektiv illustreras med hjälp av mängder: kontinuerliga och diskreta. En *kontinuerlig mängd* kan i detta sammanhang illustreras med en pizza. Den utgör helheten och om man delar helheten i fyra delar måste varje del av pizzan vara lika stor som de andra för att utgöra en bråkdel, det vill säga en fjärdedel. I en *diskret mängd* utgörs helheten av ett antal objekt, låt säga tolv godisbitar. Om vi vill dela in godisbitarna i fjärdedelar blir det centralt att antalet godisbitar i varje bråkdel är lika många, i detta fall tre bitar i varje fjärdedel. Hur godisbitarna ser ut, smakar eller om de är lika stora har ingen betydelse. Delningen av de två olika mängderna lägger alltså fokus på skilda saker, vid *kontinuerliga mängder* på att bråkdelarna blir *lika stora* och vid *diskreta mängder* på att antalet objekt är *lika många*.

Vår studie om tal i bråkform utgick från en diagnos med nio uppgifter. De var främst av sådan karaktär att eleverna skulle markera eller fylla i objekt för att visa ett bråkuttryck i en diskret mängd, till exempel ringa in $\frac{2}{3}$ av 24 objekt. Vid analysen av undersökningsmaterialet tolkades svaren i syfte att identifiera de strategier som eleverna använde.

För att förstå vilka missuppfattningar som ligger bakom elevers svårigheter räcker det inte att ta reda på vilka sorters uppgifter som är särskilt svåra, eller vilka bråkuttryck som är lättare för eleverna att använda än andra. För att kunna hjälpa eleverna krävs förståelse för deras resonemang och kunskap om vilka strategier de använder. Vi vill diskutera områden som vi i resultatet av vår studie såg kan vara problematiska för elever vid behandling av tal i bråkform.

Naturliga tal kan vara en distraherande faktor

Till skillnad från de naturliga talen representeras tal i bråkform av *två* symboler, täljare och nämnare, men står trots detta bara för *ett* tal. Detta gör att många elever tolkar ett bråkuttryck som två naturliga tal som är oberoende av varandra.

På Nämnaren på nätet finns en sammanställning av ord, termer och begrepp som rör tal i bråkform

Missuppfattningen kan visa sig genom att elever ser täljaren eller nämnaren som ett tal som används för att lösa uppgiften. Om exempelvis $\frac{2}{3}$ av 24 trianglar ska markeras, förekommer det att elever markerar två alternativt tre trianglar. De tolkar de ingående symbolerna som heltal och tar inte hänsyn till hur täljaren 2 och nämnaren 3 förhåller sig till den hela mängden med 24 trianglar.

Det kan även ta sig uttryck i att elever ser täljare och nämnare som instrument, tal, som ska användas för någon form av operation. Uttrycket $\frac{3}{4}$ kan de förklara med att 3 multiplicerat med 4 är 12.

9. Du har en klasskamrat som har problem med en matteuppgift. Visa med en egen figur hur du skulle förklara bråktalet $\frac{3}{4}$ för din kompis.

$$3 \cdot 4 = 12$$

Liknande problem kan bli uppenbara då elever ser till täljare och till nämnare oberoende av varandra. Dessa elever saknar förståelse för täljarens och nämnarens innebörd samt sambandet mellan dem. De kan, liksom i exemplet nedan, bilda ett bråkuttryck som visar på de oberoende delarna, det vill säga antalet svarta respektive vita objekt, istället för den relation mellan de svarta och vita rutorna som det egentligen representerar.

3. Hur stor del av rutorna är svarta? Svara i bråkförm. $\frac{3}{6}$



Svårigheterna kan kopplas till en så kallad N-distraktion. Kortfattat kan N-distraktionen beskrivas som att de naturliga talen med tillhörande räknelagar stör eleverna vid mötet med tal i bråkform, vilket kan resultera i att elever ser täljare och nämnare var för sig, både när de opererar med och jämför olika bråkuttryck. Så länge de inte har bråkbegreppet helt klart för sig är risken stor att de använder sig av de räknelagar som gäller för de naturliga talen genom att till exempel addera täljare och nämnare var för sig vid addition av två bråkuttryck.

Att se till helheten vid diskreta mängder

Ytterligare en svårighet är förmågan att se den diskreta mängden som en helhet, vilket visar sig genom att elever inte ser till den givna helheten utan bildar en egen för att lösa uppgiften.

2. Fyll i tre femtedelar av stjärnorna.



I elevexemplet har den nya helheten bildats med hänsyn till nämnarens storlek, femtedelar, och eleven har efter denna modifiering av förutsättningarna löst uppgiften. Missuppfattningen kan kopplas till att elever har en föreställning om att en helhet enbart består av fem delar om det är femtedelar som behandlas, som i bildexemplet då eleven endast använder fem av helhetens tio stjärnor. Resultatet blir därför en begränsning i elevens uppfattning av helheten och en avsaknad av förståelse för att $3/5$ inte bara kan representeras som tre stjärnor av fem utan även som sex stjärnor av tio.

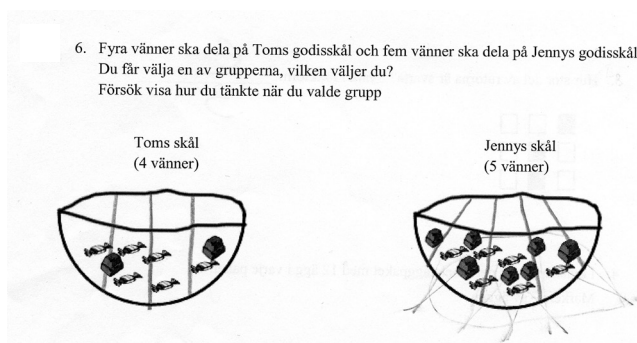
Problem med helheten fanns även i uppgifter med på varandra följande deluppgifter:

a) kryssa över $1/4$ av trianglarna, b) ringa in $2/3$ av alla trianglar.

Svårigheten var då att bevara den givna helheten, 24 trianglar, genom hela uppgiften. En elev kan klara av att i första deluppgiften kryssa över $1/4$ av helhetens 24 trianglar, men ser i påföljande deluppgift endast till den del av helheten som inte har kryssats över i den tidigare lösningen, det vill säga de 18 ”okryssade” trianglarna.

Bråkdelaers egenskaper för diskreta mängder

Vi kunde se att elever har missuppfattningar om bråkdela som lika delar i diskreta mängder. Vid sådan delning utgår vissa elever från nämnarens storlek och bildar antalet grupper därefter, men tar inte hänsyn till att det ska vara *lika många objekt i varje bråkdela*. Då objekten inte ligger jämnt uppradade tycks uppdelningen oftare resultera i olika antal objekt i de ingående bråkdelarna.



Utifrån exemplet förmodas eleven ha dragit en slutsats om att det är själva godisskålen som ska delas upp och inte innehållet. Sett till uppgiftens konstruktion är detta tolkningsbart. Elevexemplet visar dock tydligt på den skillnad som finns mellan delning av kontinuerliga mängder där det centrala är storleken på delarna och delning av den diskreta mängden där det är antalet objekt i varje del som är av vikt.

I andra fall har objekten delats in efter utseende istället för antal och eleven anser sig på så vis ha bildat en bråkdela för varje ”sorts” objekt, likt exemplet på nästa sida.

8.

24

a) Kryssa över $\frac{1}{4}$ av trianglarna. 0

b) Ringa nu in $\frac{2}{3}$ av alla trianglarna.

c) Hur stor del av trianglarna är inte inringade eller överkryssade?

Svara i bråkform. $\frac{1}{3}$

Tre olika saker.
 Så alltså 3 delar

$\frac{24}{3} = 8$

Allmänna bråk

Inom flera av de identifierade strategierna har vi kunnat se att många elever har *svårare att behandla allmänna bråk än stambråk*. Det vill säga att det är svårare att lösa uppgifter av typen $\frac{3}{5}$ av 10, där täljaren är skild från 1, än uppgifter av typen $\frac{1}{5}$ av 10.

2. Fyll i tre femtedelar av stjärnorna.

Vid behandling av de allmänna bråken krävs det att eleven fokuserar på både täljare och nämnare och att de dessutom kan skilja på deras betydelse, vilket inte behövs på samma sätt när det gäller stambråk.

Undervisningens betydelse

De problemområden som vi har identifierat kan sammanfattas till svårigheter eller missuppfattningar som sammankopplas med

- ◇ hur tal i bråkform representeras
- ◇ bristande förståelse för helhet och bråkdelaers egenskaper vid behandling av diskreta mängder
- ◇ övergripande problem med behandling av allmänna bråk.

Vad kan svårigheterna bero på? Vi har tittat på hur tal i bråkform introduceras och representeras i undervisning och i läromedel. Vår uppfattning är att bråkuttryck oftast exemplifieras med hjälp av kontinuerliga mängder, till exempel pizzor eller chokladkakor. I de fall diskreta mängder behandlas är antalet objekt ofta lika med nämnaren i det bråk som visas, fem kulor när femtedelar ska exemplifieras. Den uppfattning som eleven då får av vad $1/5$ innebär kan leda till en begränsad förståelse och att eleverna ser bråkuttrycket som två olika tal. Genom att använda ett varierande antal objekt, det vill säga att låta de fem kulorna såväl som godispåsens 25 bitar eller skolans 400 elever utgöra helheten, kan eleverna istället ges en bild av att femtedelar kan se ut på olika sätt.

Eleverna måste ges möjlighet att förstå likheter och skillnader mellan den diskreta mängden och den kontinuerliga mängden. Eftersom betydelsen av lika delning kan vara olika måste eleverna utveckla förståelse för dessa två olika mängder, vilket kan främjas genom en parallell undervisning av båda.

I ett vidare perspektiv förkroppsligar tal i bråkform inte bara en utan flera olika matematiska uttrycksformer såsom del-helhet, proportion, division, operation och mått. Många elever saknar en helhetssyn på de olika uttrycksformerna och ser istället endast ytliga strukturer. Det medför att undervisningen måste inriktas mot att synliggöra de olika uttrycksformerna och att problematisera, det vill säga vrida och vända på de modeller och metoder som används för att öka förståelsen för tal i bråkform.

Utifrån vår studies resultat är det enligt oss önskvärt att mer fokus läggs på den diskreta mängdens betydelse. Genom att dela med oss av de missuppfattningar och svårigheter som vi identifierade hoppas vi kunna bidra med en ökad insikt kring de resonemang som elever för och hur undervisningen kan utformas för att möta alla elevers individuella förutsättningar och behov av stöd.

LITTERATUR

- Behr, M., Lesh, R., Post, T. & Silver, E. (1983). Rational number concepts. I R. Lesh & M. Landau (red). *Acquisition of mathematics concepts and processes* (91–126). New York: Academic Press.
- Charles, K. & Nason, R. (2000). Young children's partitioning strategies. *Educational studies in mathematics*, 43, (2), 191–221.
- Clarke, D., Roche, A. & Mitchell, A. (2010). Tio sätt att göra bråk levande. *Nämnamn* 2010:2, 37–44.
- Empson, S. (1999). Equal sharing and shared meaning: The development of fraction concepts in a first-grade classroom. *Cognition and instruction*, 17, (3), 283–342.
- Engström, A. (1997). *Reflektivt tänkande i matematik. Om elevers konstruktioner av bråk*. Stockholm: Almqvist & Wiksell.
- Lamon, S. (2005). *Teaching fractions and ratios for understanding: essential content knowledge and instructional strategies for teachers*. Mahwah: Erlbaum.
- McIntosh, A. (2008). *Förstå och använd tal – en handbok*. NCM, Göteborgs universitet.
- Moseley, B. & Okamoto, Y. (2008). Identifying fourth grader's understanding of rational number representations: A mixed methods approach. *School science and mathematics*, 108 (6), 238–250.
- Streefland, L. (1993). Fractions: A realistic approach. I T. Carpenter, E. Fennema & T. Romberg (red). *Rational numbers: An integration of research* (289–326). Hillsdale: Erlbaum.