

## Subtraktion

Vad är egentligen subtraktion? Vad behöver en lärare veta om subtraktion och subtraktionsundervisning? Om elevers förståelse av subtraktion och om elevers vanliga missuppfattningar? Om hur subtraktion kan användas? Finns det forskning om subtraktion som kan hjälpa lärare att planera sin undervisning mer effektivt? Den här artikeln kommer inte att ge svar på alla ovanstående frågor, men förhoppningsvis belysa att det finns en hel del kunskap om subtraktion som kan vara användbara utgångspunkter för lärares planering av undervisning.

Det finns flera aspekter av subtraktion som lärare bör ha kunskap om, en matematisk och en didaktisk. Den matematiska sidan handlar om hur subtraktion definieras, vad den definitionen innebär, hur subtraktion kan uttryckas och vilka räknelagar som kan tillämpas. Den didaktiska dimensionen innefattar bland annat vilka situationer i omvärlden som kan beskrivas med hjälp av subtraktion, vilka olika beräkningsmetoder som finns, hur dessa förhåller sig till förståelse och effektivitet samt vilka olika didaktiska modeller som kan hjälpa, eller stötta, elevers förståelse för subtraktion. De tre didaktiska aspekterna är lika viktiga och samverkar. I denna artikel presenteras och diskuteras delar av den forskning som finns om *situationer inom subtraktion*. I en kommande artikel kommer *beräkningsstrategier* och *didaktiska modeller* att behandlas.

### Situationer inom subtraktion

Den matematiska definitionen av subtraktion är att det är den inversa operationen till addition. Detta är koncist och entydigt, men när man betraktar olika situationer i omvärlden som kan tolkas i termer av en subtraktion blir det avsevärt mer komplext. De olika situationer som uppstår i omvärlden kan beskrivas med ord eller handling, men då de översätts till matematiska uttryck syns de inte längre. Gudrun Malmer och Bengt Johansson, bland andra, har publicerat olika karakteriseringar av subtraktion och addition och nedan presenterar jag en modell som är en utveckling av det arbete Karen Fuson har gjort inom området.

Gemensamt för dessa försök att tydliggöra vilka situationer som handlar om subtraktion är att det inte går att beskriva subtraktion utan att samtidigt beskriva addition. Subtraktion och addition är oskiljaktiga. För att eleverna ska få möjlighet att upptäcka sambandet mellan subtraktion och addition bör dessa räknesätt inte behandlas var för sig. Tvärtom, att elever redan från början ges möjlighet att diskutera sambanden mellan subtraktion och addition ligger i linje med vad som skrivs i Lgr II om samband mellan begrepp. Där anges också att ett syfte med matematikundervisningen är att eleverna ska ges förutsättningar att tolka vardagliga situationer och formulera dessa med hjälp av matematik.

## Dynamiska och statiska situationer

Situationer inom subtraktion och addition kan delas in i två huvudtyper: dynamiska och statiska. Om du frågar en vuxen vad subtraktion innebär, är det mycket troligt att han eller hon svarar att det är när man tar bort något eller minskar något. På motsvarande sätt säger de flesta att addition är då man får mer. Detta är den dynamiska sidan av subtraktion och addition, man utgår från en mängd som minskas eller ökas. Men det finns även statiska situationer som kan uttryckas matematiskt med subtraktion och addition. Två mängder där ingenting tas bort eller tillförs kan jämföras med varandra. Ett exempel är då vi jämför två personers olika längd. Ingen blir längre eller kortare men vi kan beskriva längdskillnaden med subtraktion. Jag är 165 cm och min dotter är 162 cm, då är jag 3 cm längre än vad hon är eftersom  $165 - 162 = 3$ .

Här finns det anledning att stanna upp och fundera lite extra på begreppet "skillnad". Skillnaden i längd mellan min dotter och mig är 3 cm. Jag är 3 cm längre än min dotter och hon är 3 cm kortare än jag. Skillnaden i sig är positiv oavsett ur vems perspektiv man ser det. I översikterna nedan visas detta förhållande genom att jämförelsesituationerna har två riktningar. Vi kan se hur mycket mer eller hur mycket mindre det ena talet är jämfört med det andra. Då skillnaden efterfrågas i vardagliga situationer är det underförstått absolutbeloppet som vi söker eftersom vi redan i frågan har talat om ifall det sökta talet betecknar mer eller mindre än talet det jämförs med. Vi vänjer oss därför vid att alltid teckna subtraktionen med det större talet först. Detta kan ställa till problem när eleverna senare möter negativa tal då riktningen i skillnaden är betydelsefull och skillnaden ibland är negativ. Läs gärna mer om detta i Cecilia Kilhamns avhandling *Making sense of negative numbers*.

En annan statisk situation är del-helhetssituationer: I en klass går det 24 elever. Av dem är 14 flickor och 10 pojkar. Klassen kan delas upp i två delmängder som tillsammans utgör hela klassen. Det innebär dock inte att någon mängd tillförs eller dras ifrån, utan det är en statisk situation som kan tecknas matematiskt som  $24 - 14 = 10$ ,  $24 - 10 = 14$ ,  $10 + 14 = 24$  eller  $14 + 10 = 24$ .

De grundläggande situationer som finns inom subtraktion och addition kan sammanfattas i nedanstående översikt.

	Minskning	Ökning
Dynamiska situationer	<p style="text-align: center;">Förändring</p> <p style="text-align: center;">- <input type="text"/></p> <p>Start <input type="text"/> → Slut <input type="text"/></p>	<p style="text-align: center;">Förändring</p> <p style="text-align: center;">+ <input type="text"/></p> <p>Start <input type="text"/> → Slut <input type="text"/></p>
	Jämförelse	Del-helhet
Statiska situationer	<p style="text-align: center;">Hur mkt mer?</p> <p>stor <input type="text"/> liten <input type="text"/> → skillnad <input type="text"/></p> <p style="text-align: center;">Hur mkt mindre?</p> <p>stor <input type="text"/> liten <input type="text"/></p>	<p style="text-align: center;">Helhet</p> <p>del <input type="text"/> del <input type="text"/></p>

För varje situation kan olika frågor ställas. Då situationerna innehåller tre mängder kan tre olika frågor ställas eftersom det kan vara tre olika delar som utgör den okända delen, i alla fall om vi endast tänker på slutna frågor med ett enda möjligt svar. Dessa frågor exemplifieras i nedanstående översikt. I delhelhetssituationerna är det tre delar, men dessa ger ändå bara i praktiken två olika frågeställningar eftersom det inte spelar någon roll vilken av delarna som är den okända.

Minskningar	Ökningar
1. Sofia har sex päron och äter upp två av dem, hur många har hon nu?	4. Sofia har fyra päron och får två till, hur många har hon nu?
2. Sofia har sex päron och äter upp några av dem, då har hon kvar fyra päron. Hur många åt hon upp?	5. Sofia har fyra päron och får fler, nu har hon sex päron. Hur många päron fick hon?
3. Sofia har några päron och äter upp två av dem, då har hon kvar fyra päron. Hur många hade hon från början?	6. Sofia har några päron och får två till, nu har hon sex päron. Hur många hade hon från början?
Jämförelser	Del-helhetssituationer
7. Sofia har fyra päron, Martin har två päron. Hur många fler päron har Sofia?	13. Sofia har fyra päron, Martin har två päron, hur många har de tillsammans?
8. Sofia har fyra päron, Martin har två päron. Hur många färre päron har Martin?	14. Sofia har fyra päron, Martin har också några päron. Tillsammans har de sex päron, hur många päron har Martin?
9. Sofia har några päron, Martin har två päron och det är två päron färre än vad Sofia har. Hur många päron har Sofia?	
10. Sofia har två päron fler än vad Martin har. Martin har två päron. Hur många päron har Sofia?	
11. Sofia har fyra päron, Martin har också några päron och det är två färre päron än vad Sofia har. Hur många päron har Martin?	
12. Sofia har fyra päron och det är två fler päron än vad Martin har. Hur många päron har Martin?	

I ovanstående sammanställning av möjliga frågeställningar framgår att alla minskningar inte enklast beskrivs med ett subtraktionsuttryck. I flera fall är ett additionsuttryck enklare för att finna svaret. På motsvarande sätt är det med ökningssituationerna, många tecknas enklast med ett subtraktionsuttryck. Att i undervisningen utgå från en verklig situation och vända och vrida på frågeställningarna är *ett* sätt att betona hur subtraktion och addition hänger samman.

Givetvis finns det dessutom en mängd sammansatta situationer. Exempelvis kan vi fråga oss hur Martin och Sofia ska göra för att få lika många päron då han har två och hon har fyra. Då jämförs rimligtvis först deras päroninnehav för att finna skillnaden. Sedan behöver Martin skaffa sig fler päron och då utförs en ökning. Eller så kan Sofia göra sig av med två päron, dvs utföra en minskning. Ett tredje alternativ är att Martin ber Sofia att ge honom ett för att de ska få lika många. I samtliga fall har de utfört en dynamisk händelse efter att först ha jämfört sina päronmängder.

I ovanstående sammanställning är samtliga frågeställningar slutna. Det går naturligtvis även att ställa öppna frågor där flera svar är möjliga. Då kan man utgå från att två av de tre mängderna är okända och exempelvis fråga hur många päron Sofia och Martin kan ha vardera om de tillsammans har sex stycken. Här finns en begränsad mängd olika svar som är möjliga. Hur många svar kan man finna på frågor där skillnaden är det enda som anges? Sofia har två fler päron än Martin, hur många päron har de var? Även om mängden svar är oändligt många, finns det svar som inte är möjliga, Sofia kan knappast ha ett päron. Att diskutera begränsningar är en infallsvinkel som öppnar för att ge elever möjlighet att se mer generella samband i matematik.

## Situationer i undervisningen

Så här långt har jag beskrivit vilka situationer som finns och därmed vilka frågeställningar som kan utgå från verkliga situationer. Hur kan detta utgöra en grund för planering av undervisning? En av de viktigaste uppgifterna för en matematiklärare måste vara att hjälpa eleverna att förstå räknesättens innebörd, skrev Bengt Johansson 1982. I Lgr 11 fastslås att ett syfte med matematikundervisningen är att ge eleverna *förutsättningar att utveckla kunskaper för att kunna tolka vardagliga och matematiska situationer samt beskriva och formulera dessa med hjälp av matematikens uttrycksformer*. Ett centralt innehåll för årskurs 1–3 är *de fyra räknesättens egenskaper och samband samt användning i olika situationer*. Jag anser att det är oerhört väsentligt att förstå räknesätten, begripa hur de fungerar och vilka situationer som kan kopplas ihop med de olika räknesätten, vilket också blir en rimlig tolkning av *egenskaper och samband* i 2011 års formulering.

Ovanstående sammanställning av olika situationer för subtraktion och addition är resultat av många olika forskares arbete med att undersöka hur barn förstår aritmetik. Jag menar att lärare kan använda denna sammanställning i planeringen av sin matematikundervisning. Mariolina Bartolini Bussi beskriver hur man i kinesiska läromedel använder denna struktur konkret. Eleverna får lösa nio olika uppgifter om samma omvärldssituation och uppgifterna är ordnade så att de belyser hur addition och subtraktion är varandras inverser. Detta hjälper eleverna att få en tydlig struktur över de båda räknesätten. Susanne Frisk har visat att uppgifter inom subtraktion av typ 1, dvs minskningar där man inte vet återstoden, är den dominerande typen av subtraktionsuppgifter i svenska läromedel. På motsvarande sätt är additioner av typ 4, dvs ökning där slutsumman är den okända, vanligast. Eleverna ges då inte möjlighet att se sambanden mellan de båda räknesätten lika tydligt som om de får möta frågeställningar av samtliga typer. För att fördjupa förståelsen för räknesätten bör eleverna också själva formulera frågor och då kan ovanstående struktur hjälpa eleverna att variera sina frågeställningar.

## Sammanfattning

Strukturen är ett resultat av kunskap som forskare och matematikdidaktiker har arbetat fram i samarbete med verksamma lärare. Hur får blivande lärare ta del av den kunskapen under sin utbildning? I en genomgång av den kurslitteratur som användes vid Stockholms universitets lärarutbildning under läsåret 2008/09 fann jag, med några få undantag, ingen god grund för den blivande läraren avseende olika situationer inom subtraktion och addition (Larsson, 2010).

I den här artikeln har jag presenterat en struktur för grundläggande situationer i verkligheten som hör samman med subtraktion och addition. Vidare har jag presenterat en struktur för vilka frågeställningar som finns inneboende i situationerna. Strukturerna ger en god utgångspunkt för att kunna ge eleverna förutsättningar att förstå räknesätten så att de kan tolka vardagliga händelser till matematiska uttryck, och tvärtom, kunna tolka matematiska uttryck till verkliga händelser. Jag menar att en tydlig struktur över olika situationer både kan utgöra ett undervisningsinnehåll och en grund för lärarens planering av undervisningen.

## LITTERATUR

- Bartolini Bussi, M. G. (2011). *Towards cultural analysis of content: Problems with variation in primary school. Proceedings SEMT '11*. Prag: Charles university, Faculty of education.
- Frisk, S. (2009). Subtraktion i läromedel för åk 2. *Nämnamnaren*, nr 3, s 10–15.
- Fuson, K. C. (1992). Research on whole number addition and subtraction. I D. A. Grouws (red), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. New York: Macmillan.
- Johansson, B. (1982). Problem med problemlösning. *Nämnamnaren 1982-83*, nr 3, s 10–13.
- Kilhamn, C. (2011). *Making sense of negative numbers*. Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis.
- Larsson, K. (2010). *Vad handlar subtraktion om?* Stockholm: Institutionen för matematikämnets och naturvetenskapsämnenas didaktik.
- Malmer, G. (1990). *Kreativ matematik. Studiehandledning*. Solna: Ekelund.
- Skolverket (2011). *Läroplan för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet, Lgr II*. Stockholm: Skolverket.