

Tallinjen

– en bro mellan konkreta modeller och abstrakt matematik

Fem matematiklärare från Transtenskolan i Hallsberg har under handledning av Cecilia Kilhamn från Göteborgs universitet arbetat med en Learning study i årskurs 6 och 7. De har fokuserat på elevers förmåga att storleksordna tal i bråkform och här berättar de om sina erfarenheter och lärdomar.

När en Learning study planeras väljs ett område som upplevs som problematiskt att undervisa om. I lärolaget hade vi sett behov av att utveckla elevernas förmåga att arbeta med tal i bråkform. I vår kommun hade tester från *Förstå och använda tal* gjorts och resultatet bekräftade den bild vi hade av att undervisningen om tal i bråkform behövde utvecklas. Vi såg bland annat att eleverna hade svårt med följande uppgifter:

Placera $1/10$ och $4/5$ på tallinjen.

Denna uppgift klarade 40 % av eleverna i åk 6 och 50 % av eleverna i åk 7.

Vilket av bråken $5/6$, $5/7$, $5/8$ och $5/9$ är störst?

I åk 6 kunde 70 % av eleverna avgöra detta och 80 % av eleverna i åk 7.

Under arbetet med en Learning study växer insikten om hur komplext lärandet är. För att elever ska utveckla ett kunnande, kan det finnas ett antal kritiska aspekter som de måste förstå för att lärande ska bli möjligt. Vi ställde oss frågan: Vad är det eleverna måste förstå för att lära sig att storleksordna bråk? Våra viktigaste insikter i studien blev att elever behöver utmanas att gå från konkreta exempel till abstrakt matematik och att tallinjen är ett bra redskap i denna process. Genom en Learning study ges möjligheter för oss lärare att förstå processen bättre.

En Learning study börjar alltid med att ett lärandeobjekt identifieras och sedan försöker man ta reda på så mycket som möjligt om detta innan ett förtest och en lektion designas. Tillsammans började vi i lärolaget fundera på vad det egentligen innebär att förstå storleken av ett bråk.

Om bråk

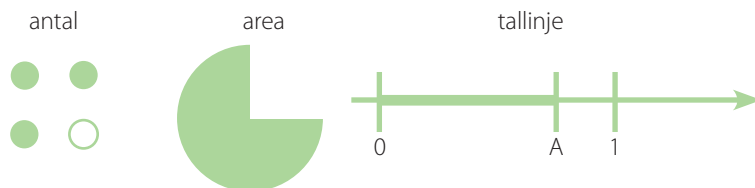
Bråk är ett rationellt tal som kan representera del av antal, del av helhet och ett förhållande mellan två tal. Vid undervisning av bråk är det vanligt att man använder sig av olika modeller som lyfter fram skilda aspekter av bråket. I boken *A focus on fractions, bringing research to the classroom* jämförs tre modeller:

På Nämnaren på nätet finns en sammanställning av ord, termer och begrepp som rör tal i bråkform

Modell	Helheten	"Lika delar" definieras av	Vad bråket indikerar
Antalsmodell	Antalet objekt i hela mängden	Lika många objekt	Antal objekt i en delmängd av hela mängden
Areamodell	Arean av ett område	Lika stor area	Del av hela arean
Tallinje	En längdenhet, ett enhetsavstånd	Lika stora avstånd	Platsen för en punkts avstånd till noll i relation till den givna längdenheten

Jämförelse mellan olika bråkmodellens egenskaper.

I antalsmodellen utgörs helheten av ett antal, man räknar exempelvis hur många av eleverna i klassen som är flickor eller hur många av kulorna i burken som är röda. Areamodellen brukar ofta konkretiseras i pizzor, tårter eller chokladkakor. Tallinjen kan liknas vid en linjal och skiljer sig från de två övriga modellerna på flera sätt. I motsats till antalsmodellen är både areamodellen och tallinjen kontinuerliga vilket innebär att delarna inte är visuellt åtskilda. Tallinjen har dessutom en dubbel representation av tal: dels representeras ett tal av en punkt på tallinjen och dels av avståndet mellan denna punkt och noll. Tallinjen kräver numeriska symboler för att talen ska vara meningsfulla. Minst två referenspunkter behövs för att en punkt på linjen ska kunna representera ett tal. En sådan koppling till symboler är inte nödvändig i de andra modellerna. Jämför de tre illustrationerna av talet $\frac{3}{4}$ i figuren. Utan referenspunkterna blir punkten A på tallinjen inte en illustration av talet.



Vi diskuterade bråkets olika funktioner och sammanfattade i följande aspekter:

- Bråk som tal på tallinjen.
- Bråk som del av helhet; exempelvis del av area eller del av sträcka.
- Bråk som division; t ex 3 delat på 5, och som kvoten vid en division.
- Bråk som andel av; t ex 3 av 5, eller som del av antal där helheten utgörs av ett antal.
- Bråk som proportionalitet; 2 av 3 beskriver samma proportion som 4 av 6.
- Bråk omskrivet till procent (hundra delar).

I vår studie fokuserade vi huvudsakligen på aspekterna A och B.

Lektionen förändras

Efter att lärandeobjektet har bestämts och eleverna har gjort förtestet planeras den första lektionen som sedan genomförs i den första klassen. Klassens resultat analyseras och en ny lektion kring samma lärandeobjekt planeras. Den reviderade lektionen hålls av en annan lärare i en ny klass. Efter ytterligare en revision genomförs lektionen en tredje gång i en annan klass. I följande stycke beskriver vi hur vår lektion ändrades under studiens gång.

I de två första lektionerna var vi noga med att inledningsvis variera täljaren medan nämnaren hölls konstant och därefter varierades nämnaren medan täljaren hölls konstant. Detta gjordes med hjälp av pizzor, bråkcirklar, bråkplank och tallinjer. Slutligen jämfördes tal i bråkform där både täljare och nämnare varierade. Även i den tredje lektionen gjordes jämförelser då enbart täljare eller nämnare varierade, men mer tid och större betoning lades på att jämföra tal i bråkform då *både* täljare och nämnare varierade.

Tallinjen användes som det främsta redskapet när tal i bråkform jämfördes. Med hjälp av placering av bråk på tallinjen diskuterades hur de kunde jämföras med stöd av referenspunkter. Stor vikt lades vid att formulera generella samband mellan täljare och nämnare som kunde utnyttjas för att jämföra tal i bråkform med referenspunkterna 0, $\frac{1}{2}$ och 1. Detta fick mycket goda effekter.

De generella samband som eleverna arbetade med introducerades av läraren. Eleverna fick sedan använda dessa när de storleksordnade tal i bråkform, både vid gemensamma aktiviteter i helklass och enskilt arbete. Samband som användes:

- ◇ en hel representeras alltid av lika många delar i täljare som nämnare
- ◇ en halv representeras alltid av att täljaren är hälften av nämnaren
- ◇ om täljaren är mindre än hälften av nämnaren är bråket mindre än en halv
- ◇ om täljaren är större än hälften av nämnaren är bråket större än en halv
- ◇ om täljaren är större än nämnaren är bråket större än 1.

Genom att utmana eleverna med svårare uppgifter, som att de fick arbeta mer med uppgifter där både täljare och nämnare varierade, och även genom att vi betonade strategier för hur de kunde använda referenspunkter, nådde vi betydligt bättre resultat.

Resultat

Vi redovisar här resultat på fem av uppgifterna på för- respektive eftertest. De frågor som valts ut är de som har direkt koppling till lärandeobjektet. De övriga frågorna handlar främst om förkunskaper.

Frågor förtest och eftertest

4. Storleksordna följande tal från det minsta till det största
 $\frac{6}{11}$ $\frac{9}{11}$ $\frac{1}{11}$ $\frac{13}{11}$ $\frac{11}{11}$ $\frac{4}{11}$

5. Storleksordna följande tal från det minsta till det största
 $\frac{6}{6}$ $\frac{6}{11}$ $\frac{6}{1}$ $\frac{6}{8}$ $\frac{6}{7}$ $\frac{6}{3}$

6. Storleksordna följande tal från det minsta till det största
 $\frac{6}{6}$ $\frac{6}{11}$ $\frac{9}{11}$ $\frac{4}{8}$ $\frac{1}{7}$ $\frac{4}{3}$

Exempel på variationsmönster där nämnaren är konstant och täljaren varierar:

$\frac{4}{8}$ $\frac{8}{8}$ $\frac{1}{8}$ $\frac{9}{8}$

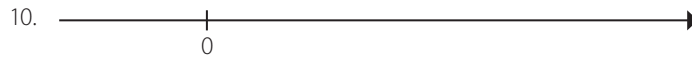
Exempel på variationsmönster där täljaren är konstant och nämnaren varierar:

$\frac{3}{10}$ $\frac{3}{2}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{3}{7}$

9. Vilket av dessa tal

$\frac{6}{11}$ $\frac{13}{12}$ $\frac{4}{9}$ $\frac{3}{7}$ $\frac{5}{8}$ $\frac{21}{15}$ $\frac{8}{7}$

a) är mindre än $\frac{1}{2}$ b) är större än $\frac{1}{2}$ men mindre än 1 c) är större än 1



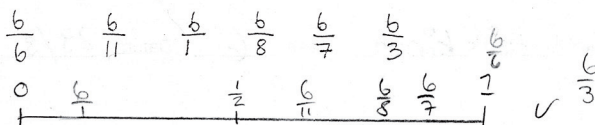
Ovan visas en tallinje. Placera ut följande tal: $\frac{1}{8}$ $\frac{8}{9}$ $\frac{6}{10}$ $\frac{1}{3}$

I följande sammanfattande tabell visas andel i procent av eleverna som besvarade uppgiften rätt vid första, andra respektive tredje lektionen. Talen inom parentes anger frågans nummer i för- och eftertesten.

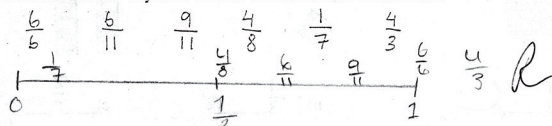
		Förtest	Eftertest
lektion 1	Storleksordna bråk med samma nämnare (4)	62	90
	Storleksordna bråk med samma täljare (5)	52	57
	Storleksordna bråk där både täljare och nämnare varierar (6)	19	24
	Storleksordna bråk utifrån referenspunkter (9)	49	54
	Storleksordna bråk efter tallinje (10)	29	43
lektion 2	Storleksordna bråk med samma nämnare (4)	57	81
	Storleksordna bråk med samma täljare (5)	33	57
	Storleksordna bråk där både täljare och nämnare varierar (6)	5	5
	Storleksordna bråk utifrån referenspunkter (9)	27	35
	Storleksordna bråk efter tallinje (10)	14	24
lektion 3	Storleksordna bråk med samma nämnare (4)	55	95
	Storleksordna bråk med samma täljare (5)	39	53
	Storleksordna bråk där både täljare och nämnare varierar (6)	11	74
	Storleksordna bråk utifrån referenspunkter (9)	57	84
	Storleksordna bråk efter tallinje (10)	28	70

Att storleksordna bråk när både täljare och nämnare varierar uppfattar vi som en svårare uppgift än att storleksordna bråk där enbart täljare eller nämnare varierar. Därför var vi först förvånade över att eleverna i lektion tre klarade detta betydligt bättre än att storleksordna bråk med samma täljare. Det visade sig att eleverna hade svårt med bråken $\frac{6}{1}$ samt $\frac{6}{3}$. De var helt enkelt inte vana vid bråk som är större än 1. Eleven i exemplet nedan har tolkat $\frac{6}{1}$ som $\frac{1}{6}$.

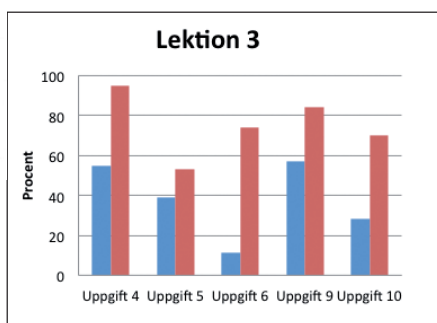
5. Storleksordna följande tal från det minsta till det största:



6. Storleksordna följande tal från det minsta till det största:



Många elever ritade tallinjer för att lösa uppgifterna och för övrigt såg vi en markant förbättring av resultaten i tredje lektionen. Den klart bästa förbättringen blev på uppgift 6 i den tredje lektionen.



Slutsatser

När det gäller storleksordning av tal i bråkform har vi funnit sex kritiska aspekter. De fem första aspekterna identifierade vi i förväg genom egen erfarenhet och litteraturstudier, den sjätte identifierades vid analys av lektionerna.

1. Täljarens och nämnarens betydelse

Denna kritiska aspekt innebär att eleven inte bara kan namnen täljare och nämnare utan också förstår vilken funktion de har för ett tal i bråkform. Att nämnaren kan sägas vara namnet på bråket som förklarar vilken sorts delar det handlar om och att täljaren (vars namn kommer av att förtälja – tala om) anger hur många delar man har tagit av dessa delar. Det är täljarens och nämnarens inbördes relation som avgör bråkets storlek.

2. Referenspunkter 0, 1/2 och 1

Eleven behöver kunna jämföra tal i bråkform med referenspunkter. För att kunna göra dessa jämförelser är det avgörande att eleven förstår vad som kännetecknar likvärdiga bråk för 1/2 och 1. Eleven måste ges möjlighet att utveckla strategier för hur ett tal i bråkform kan identifieras som större eller mindre än referenspunkterna. Exempelvis behöver eleven få syn på att bråk som är mindre än 1/2 alltid har en täljare som är mindre än hälften av nämnaren.

3. Alla delar av en helhet måste vara lika stora

Eleven måste förstå att i ett bråk uttryckt som t ex en area eller en sträcka, måste alla delar vara lika stora eller lika långa.

4. Likvärdiga bråk

Eleven behöver förstå att 2/3 har samma värde som 4/6 samt ha strategier för att kunna identifiera två bråk som likvärdiga. Den inbördes relationen är samma i 2/3 och 4/6, vilket blir tydligt om man ser bråket som representation av en proportionalitet.

5. Bråkens placering på tallinjen

För att få en god taluppfattning med tal i bråkform är det av vikt att eleven blir förtrogen med tallinjen samt lär sig strategier för att placera ut tal i bråkform både på ett ungefär och exakt på tallinjen. Ett tal i bråkform placerat på tallinjen kan ses både som en sträcka och en punkt.

6. Ett tal i bråkform kan vara större än 1

En vanlig missuppfattning bland elever är att 4/3 är detsamma som 3/4. Eleverna behöver förstå hur ett bråk som är större än 1 kan uttryckas.

Att missuppfattningar förekommer om likvärdiga bråk och bråk som är större än 1 finns beskrivet i TIMSS 2007 där eleverna fick i uppgift att avgöra vilket bråk som är lika med $\frac{2}{3}$. De kunde välja mellan $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{4}{6}$ och $\frac{3}{2}$. Det felaktiga alternativet $\frac{3}{2}$ valdes av så många som 64,4% av eleverna medan det rätta alternativet endast valdes av 10,3% av eleverna.

Förr användes tal i bråkform i betydligt större utsträckning i vardagslivet än idag. För dagens elever är undervisning om tal i bråkform viktig för att de ska utveckla en god taluppfattning och förståelse för decimaltal. Vid undervisning om begreppen andel och helhet hos tal i bråkform läggs även en grund för fortsatt utveckling av procentbegreppet. Vidare är förståelse för bråk en viktig hörnsten när eleverna undervisas om proportionalitet. För elevers förmåga att arbeta med algebra på ett framgångsrikt sätt visar det sig avgörande att de har god förståelse för bråk och förmåga att arbeta med tal i bråkform.

Summering

Styrkan med tallinjen är att tal kan representeras med både sträckor och punkter. Tallinjen kan fungera som en visuell representation av bråket, både som tal och som del av helhet.

Av vår studie drar vi slutsatsen att om eleverna ska utveckla förmågan att storleksordna tal i bråkform behöver de få möjlighet att gå från konkreta exempel till abstrakt matematik. Undervisningen får inte stanna vid att dela upp pizzor och bråkcirklar. Dessa representationsformer känner eleverna till, men det hjälper dem inte att abstrahera. Tallinjen är inte bara visuell utan också konkret i den mening att man kan rita den, stega upp avstånd, mäta osv. Det är en representationsform som tydligare leder till det abstrakta bråktänkandet.

Genom att arbeta med Learning study har alla deltagande lärare fördjupat sin ämnesdidaktiska kompetens runt lärandeobjektet. Den största vinsten är att våra ämnesdidaktiska samtal har ökat i både kvalitet och kvantitet. Arbetet har inneburit ett nytt sätt att tänka kring undervisningen där det ämnesinnehåll som ska läras ut står i fokus. För lärarlaget har arbetet också inneburit att vi börjat öppna dörrarna till klassrummen på ett nytt sätt. Genom att vi blivit mer trygga med varandra delar vi nu oftare med oss av både svårigheter och goda exempel i undervisningen.

LITTERATUR

- Bright, G., Behr, M., Post, T. & Wachsmuth, I. (1988). Identifying fractions on number lines. *Journal of Research in Mathematics Education*, 19(3), s 215–232.
- Erdtman, M. (2011). Från Pizza till tallinje – erfarenheter från en Learning Study. *Tid för matematik*, s 46–51, Stockholm: Skolverket.
- Holmqvist, M. (2006). *Lärande i skolan – Learning Study som skolutvecklingsmodell*. Lund: Studentlitteratur.
- Kiselman, C. & Mouwiz, L. (2011). *Matematiktermer för skolan*. NCM, Göteborgs universitet.
- McIntosh, A. (2009). *Förstå och använd tal – en handbok*. NCM, Göteborgs universitet.
- Olteanu, C. (2003). Algebra viktigt men svårt. *Nämnamnaren* 2003:3, s 35–39.
- Petit, M., Laird, R., & Marden, E. (2010). *A focus on fractions, bringing research to the classroom*. New York: Routledge.
- Runesson, U. (2000). Variation för lärande. *Nämnamnaren* 2000:2, s 19–25.