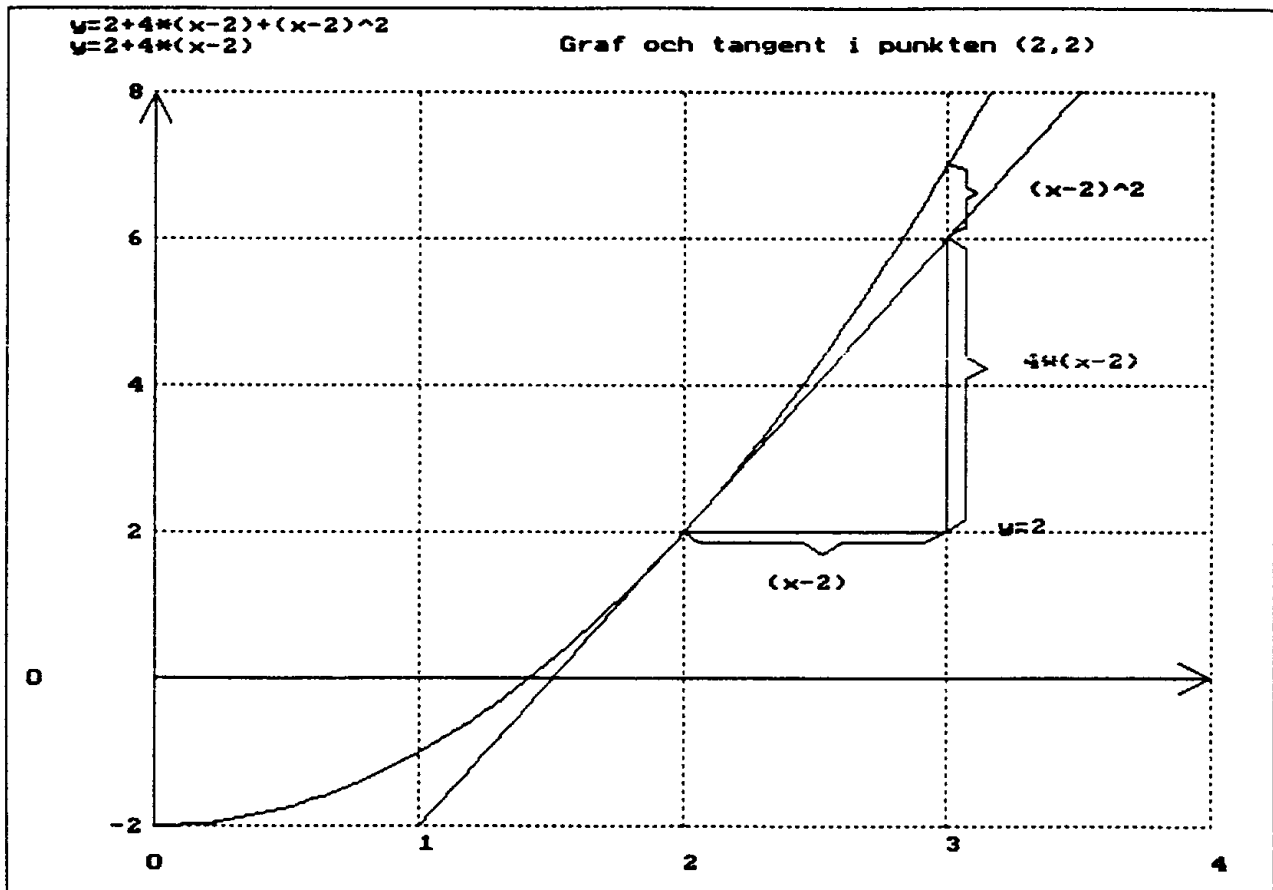


Derivata utan gränsvärde

Benkt Diehl

Artikeln handlar om en idé att göra matematik på ett annorlunda sätt.



Om man ritar diagram över de elementära monomen $y = x$, $y = x^2$, $y = x^3$... ser man att för $y = x^n$, där $n \geq 2$, tangerar kurvorna x-axeln i origo. Detta blir utgångspunkt för en definition av tangent och lutning dvs. derivata till en funktion.

Exempel 1

Rita diagram över polynomet $y = x^2 - 2$ och studera grafen i närheten av $x = 2$, dvs. sätt $x = 2 + h$ där vi tänker oss att h är ett litet tal.

Vi får utvecklingen

$$\begin{aligned} y &= x^2 - 2 = (2 + h)^2 - 2 = 2 + 4h + h^2 \\ &= 2 + 4(x - 2) + (x - 2)^2 \end{aligned}$$

För små h kan vi försumma h^2 . Vi ser att linjen $y = 2 + 4(x - 2)$ är en tangent till kurvan i punkten $x = 2$. Kurvans lutning (dvs. derivatan) i denna punkt kan representeras av riktningskoefficienten k .

Låt oss ta detta som definition av tangent och derivata till ett polynom.

Definition:

Om polynomet $P(x)$ utvecklas i närheten av $x = a$, dvs. $x = a + h$ och termerna

Benkt Diehl är lektor i matematik och fysik vid Wenströmska gymnasiet i Västerås.

ordnas efter stigande potens av h får vi uttrycket

$$P(x) = P(a + h) = P(a) + B(a)h + C(a)h^2 \\ = P(a) + B(a)(x - a) + C(a)h^2 \dots$$

Vi definierar nu *tangenten* till $P(x)$ som

$$y = P(a) + B(a)h, \text{ dvs.}$$

den linjära approximationen till polynomet. Dess riktningskoefficient, $B(a)$, kallar vi *derivatan* av $P(x)$ i punkten $x = a$:

$$P'(a) = B(a)$$

Tangentens ekvation kan man erhålla direkt genom utveckling.

Denna metod kan användas i åk 1 i gymnasiet när kvadreringsregeln och räta linjens ekvation på k -form är kända. Newton-Raphsons metod för bestämning av nollställen kan alltså visas på följande sätt:

Exempel 2

Sök nollstället till $y = x^2 - 2$ i närheten av $x_1 = 1,4$ dvs. beräkna $\sqrt{2}$.

Beteckna den exakta lösningen med x och sätt $x = x_1 + h$, utveckla uttrycket, försumma termen h^2 och lös ut h .

$$0 = x_1^2 + 2x_1h + h^2 - 2$$

$$h = \frac{2 - x_1^2}{2 \cdot x_1} = -\frac{x_1^2 - 2}{2 \cdot x_1}$$

$$x_2 = x_1 + h, \text{ ger}$$

$$x_2 = x_1 - \frac{x_1^2 - 2}{2 \cdot x_1}$$

där x_2 är en bättre approximation än x_1 .

I allmän form får vi:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

Nu beräknar vi derivatorna för $y = x^2$ och $y = x^3$ med direkt utveckling:

$$y = (a + h)^2 = a^2 + 2ah + h^2$$

alltså

$$y'(a) = 2a \text{ eller } Dy = y'(x) = 2x$$

$$y = (a + h)^3 = a^3 + 3a^2h + 3ah^2 + h^3$$

och alltså

$$y'(a) = 3a^2 \text{ eller } Dy = y'(x) = 3x^2$$

De första deriveringsreglerna är enkla att visa. Här noterar vi bara att om a och b är konstanter och

$$P(x) = a \cdot G(x) + b \cdot H(x)$$

så är

$$P'(x) = a \cdot G'(x) + b \cdot H'(x)$$

Beviset för derivatan av en produkt:

$$P(x) = G(x) \cdot H(x)$$

$$P(a + h) = G(a + h) \cdot H(a + h)$$

$$= [G(a) + G'(a)h + C(a)h^2 \dots] \cdot [H(a) + H'(a)h + D(a)h^2 \dots] = G(a) \cdot H(a) + [G'(a) \cdot H(a) + G(a) \cdot H'(a)] \cdot h + h^2 \cdot \dots$$

$[G'(a) \cdot H(a) + G(a) \cdot H'(a)]$ är vår produktderivata.

Vi bevisar nu med induktion derivatan av $y = x^{n+1}$, dvs. $y = x \cdot x^n$

$$y' = 1 \cdot x^n + x \cdot n \cdot x^{n-1} = (n+1) \cdot x^n$$

Alla polynom är deriverbara och har en tangent i varje punkt.

Vi kan också illustrera villkoren för lokala extremvärden på ett enkelt sätt. Utveckla ett polynom i en punkt där derivatan är lika med noll ($B(a)h = 0$). Vi får

$$P(a + h) = P(a) + C(a) \cdot h^2 + D(a) \cdot h^3 \dots$$

Om $C(a) < 0$ eller $C(a) > 0$ kan vi försumma $D(a)h^3 \dots$ i en tillräckligt liten omgivning till $x = a$. Tecknet på $C(a)$ kommer att avgöra extrempunktens karaktär. $C(a) > 0$ ger lokal minimipunkt och $C(a) < 0$ ger lokal maximipunkt.

Sammanfattning

Att derivera funktionen $y = (3x^4 + 2)^5$ direkt skulle kräva ett stort arbete. Man måste utveckla alla termerna och sedan sätta

$x = a + h$ osv. Därför delar vi upp funktionen i två, $z = 3x^4 + 2$ och $y = z^5$ eller $y = y(z(x))$. $z(x)$ kallas den inre funktionen och $y(z)$ den yttre.

Vi behöver också skilja på derivatan med avseende på x respektive z . Följande beteckningar används:

$$y'(x) = dy/dx, z'(x) = dz/dx$$

och

$$y'(z) = dy/dz.$$

Mot $x = a$ svarar $z = A = z(a)$.

$$z(a + h) \approx z(a) + dz/dx(a) \cdot h$$

och

$$y(A + H) \approx y(A) + dy/dz \cdot H.$$

H betyder ändringen i z då x förändras med h , dvs.

$$H = z(a + h) - z(a) = dz/dx \cdot h$$

$$y(A) = y(z(a)).$$

Slutresultatet blir

$$y(A + H) \approx y(A) + dy/dz \cdot H$$

$$= y(A) + dy/dz \cdot dz/dx \cdot h,$$

dvs. kedjeregeln

$$dy/dx = dy/dz \cdot dz/dx$$

Derivata i allmänhet

Kan vår teori användas även på andra funktioner om dessa kan exakt utvecklas i en ändlig potensserie av h ? – Ja, man kan

göra det med en annorlunda definition.

Definition:

Om $f(x)$ kan med godtycklig noggrannhet approximeras i en omgivning till $x = a$ med den obegränsade utvecklingen

$$f(a+h) = f(a) + B(a)h + C(a)h^2 + D(a)h^3 \dots$$

så säger vi att funktionen är deriverbar i $x = a$ och derivatan är $f'(a) = B(a)$.

Nu kan vi fortsätta och beräkna derivatan av $y = 1/x$, $y = \sqrt{x}$, osv., hela tiden med hjälp av serieutvecklingar och genom att försumma termer med h^2 .

Exempel 3

$$y = \frac{1}{x} = \frac{1}{a+h} \approx \frac{(a-h)}{(a^2-h^2)} \approx \frac{1}{a} - \frac{1}{a^2}h$$

$$y' = -1/x^2$$

Exempel 4

$$y = \sqrt{x} = \sqrt{(a+h)} \approx \sqrt{a} + B(a)h$$

Kvadrera och lös ut B .

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Avslutning

Artikeln skall uppfattas som ett idéinlägg. Hör gärna av dig med synpunkter.