PER-ESKIL PERSSON

En glimt av Mr Mxyzptlks värld

Med utgångspunkt i serien Stålmannen undersöks vad som händer när vardagliga geometriska objekt som kuben och tetraedern flyttas till fjärde och femte dimensionen. Vi besöker också det märkliga Flatland.

I Stålmannens hemstad Metropolis har det inträffat en rad mystiska händelser, som han med sina speciella krafter haft all möda med att reda ut.

Stålmannen finner varelsen som ligger bakom de förbryllande fenomenen.

– Då kanske du kan berätta för mig vad du är för en konstig varelse – och varifrån du kommer?

– Svaret är jätteenkelt. Du förstår, jag kommer inte från den här världen – utan från en annan dimension.

– Och när tänker du återvända till din värld?

– Aldrig! Er bakvända tredimensionella värld är jätterolig. Med mina extradimensionella krafter skulle jag lätt kunna erövra och härska över den. Tänka sig! En liten hovnarr skulle kunna bli kung!

(Stålmannen nr 30, 1944)

Enligt Mr. Mxyzptlk (uttalas Mix-yes-pitelick) kommer han från den femte dimensionen, vilket förklarar varför han kan dyka upp ur eller försvinna i tomma intet, kan flyga, har superstyrka med flera superkrafter. Är detta verkligen en logisk följd av att vara en femdimensionell varelse, och vad menar man egentligen med ”dimensioner”, i synnerhet då den femte?

När jag som ungdomlig läsare av Stålmannen – eller Superman som serien numera heter – stötte på ordet *dimension* hade jag ett väldigt dimmigt begrepp om vad det rörde sig om. Jag tänkte nog att det var någon form av annat universum som kunde förbindas med vårt eget under vissa omständigheter. Detta är kanske inte en helt felaktig uppfattning, om det nu finns en femte dimension, förstås.

För en fysiker handlar dimensioner om hur olika storheter kan uttryckas med hjälp av *fundamentala dimensioner* som längd, tid, massa, strömstyrka etc. Dessa dimensioner har fysikaliska *enheter* som meter, sekund, kilogram och ampere. Den einsteinska rumtiden har t ex fyra dimensioner, tre rumsliga och en tidsdimension. Strängteorin och M-teorin förutsäger att universum har 10 respektive 11 rumsliga dimensioner, men att alla utom tre är subatomära och inte kan uppfattas av oss människor.

Inom matematiken finns flera olika definitioner av *dimension*, beroende på inom vilken gren av matematiken man rör sig. I denna artikel begränsar vi oss till vad som kallas för *euklidiska n-rum*, alltså matematiska rum av dimension *n*. Dimensionen hos rummet är det antal parametrar (eller koordinater) som behövs för att ange läget för ett objekt, t ex en punkt, i rummet. På en tvådimensionell yta behövs det alltså två koordinater och i vår vanliga rymd tre, vilket ju är ett välkänt faktum.

Är det då så att alla geometriska objekt i en tredimensionell rymd har tre dimensioner? Nej, i själva verket finns det allt från nolldimensionella till tredimensionella ting. Punkterna, som av Euklides definierades som ”de som inte har någon utsträckning”, har givetvis dimensionen noll. Linjer, sträckor och kurvor har en dimension, plan och ytor av skilda slag har två och kroppar i rymden har tre. Detta medför också att vi måste använda olika enheter för mått inom varje dimension. Men hur skulle objekt i den fjärde eller femte dimensionen se ut, och vilka enheter skulle de få?

Den femdimensionella kuben

Hur många delar består en vanlig tredimensionell kub av? Först har den 8 hörn (punkter), som alltså har dimensionen noll. Sedan finns det 12 kanter (sträckor) och 6 sidor (ytor) med dimensionerna 1 resp 2. Till sist har vi det 3-dimensionella objektet, volymen. Totalt blir det 27 delar.

Frågan är nu vad som är motsvarigheten till kuben i två dimensioner. Låt oss definiera en ”kub” i vilken dimension som helst som ett objekt som har:

– alla sträckor (kanter) lika långa,

– alla vinklar mellan sträckorna 90°.

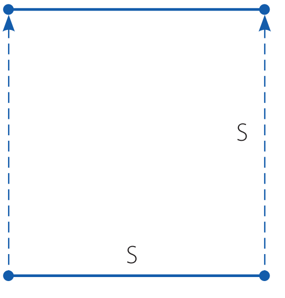
Då blir kvadraten den naturliga två-dimensionella ”kuben”, den ensamma sträckan den en-dimensionella, och punkten den nolldimensionella.

På samma sätt kan man nu dissekera dessa ”kuber” av dimension n i sina delar och beräkna summan av delarna. Nedanstående tabell erhålls då:

Man upptäcker här intressanta talmönster, exempelvis i kolumnerna för hörnen och summan av delarna. Men det är kanske inte så lätt att se hur tabellen i sin helhet är konstruerad. Om vi undantar summakolumnen bildas talen i varje ruta enligt regeln:

a	b
	$a+2b$

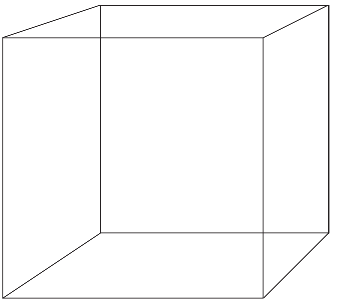
Orsaken till detta finner man i processen då en kub i en ny dimension bildas ur den föregående. Låt oss börja med en punkt. Vi dubblar den punkten och tar tag i de två punkterna och drar ut dem till en sträcka. Dimension 1 är klar. Nu dubblar vi föregående och tar tag i de två sträckorna och drar ut dem lika långt i en vinkel som är 90° mot dem:

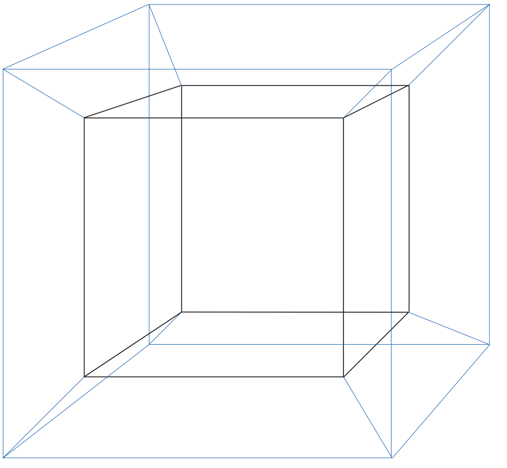


Antalet punkter fördubblas alltså och antalet linjer fördubblas plus att det bildas nya linjer för var och en av punkterna. Till detta kommer det nya tvådimensionella objektet, ytan.

Processen fortsätter nu med att man dubblar kvadraten och drar ut i 90° vinkel. Antalet punkter fördubblas igen, antalet linjer fördubblas plus en ny linje för varje punkt, antalet ytor fördubblas plus en ny yta för varje linje, och så har vi det nya tredimensionella objektet, volymen.

Objekt		Hörn Punkt	Kant Linje	Sida Yta	Kropp Volym	Summa delar
Dimension m		0	1	2	3	
Punkt	$n=0$	1				1
Sträcka	$n=1$	2	1			3
Kvadrat	$n=2$	4	4	1		9
Kub	$n=3$	8	12	6	1	27





Naturligtvis kan denna process fortsätta till nästa dimension, den fjärde. Vi dubblar alltså kuben och drar ut i 90° vinkel mot de tidigare kanterna (vilken riktning nu det är). Tillväxten av punkter, linjer och ytor sker analogt med den tidigare, och man kan konstatera att antalet volymer blir 2 plus en ny för varje sida, alltså totalt 8. Dessutom får vi ett nytt fyrdimensionellt objekt, en hypervolym. Frågan är om man kan göra sig en bild av denna fyrdimensionella kub, som även kallas *tesserakt*. Vi provar med en analogi till hur en vanlig tredimensionell kub avbildas i två dimensioner. Man visar den då ofta i genomskärning med en aning perspektiv. Om kuben ses framifrån ser vi den bakre sidan som något mindre, inne i den främre sidan. Se ovan hur det kan se ut, i tre resp fyra dimensioner, här avbildat i två!

Detta är naturligtvis inte lätt att föreställa sig, och man behöver fundera ett tag över hur det hänger ihop. Men bilderna är förhoppningsvis sådana att man kan räkna de olika delarna i dem och se att antalet stämmer.

Och sedan kommer då Mr Mxyzptlks femdimensionella kub, *penterakten*. Processen ovan kan genomföras ännu en gång och ett nytt femdimensionellt objekt bildas, hyperhypervolymen. Det går att göra en tvådimensionell bild av penterakten, men den blir av förståeliga skäl ytterst komplicerad och visas inte här. Men tabellen på föregående sida kan nu tillföras två nya rader, se nedan.

Det är också lätt att inse att penteraktens hyper-hypervolym beräknas som $V_{hh} = s^5$ och att enheten t ex är cm^5. Dess totala hypervolym (hyper-hyperarea) är $V_h = 10s^4$ med motsvarande enhet cm^4.

Naturligtvis går processen att föra ännu längre, till 6:e, 7:e eller ännu högre dimensioner, och det finns en formel för antalet objekt i varje ruta:

Om vi har en hyperkub i dimensionen n, ges antalet delar av dimension m av

$$2^{n-m} \cdot \binom{n}{m}$$

Summerar man för ett visst n alla termer från $m = 0$ till $m = n$ får man 3^n, men detta överlåts åt läsaren att visa.

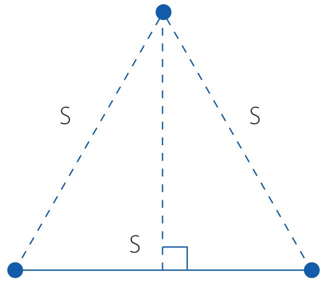
Objekt		Hörn Punkt	Kant Linje	Sida Yta	Kropp Volym	Hyper-volym	Hyper-hyper-volym	Summa delar
Dimension m		0	1	2	3	4	5	
Hyperkub	$n = 4$	16	32	24	8	1		81
Hyperhyperkub	$n = 5$	32	80	80	40	10	1	243

Observera också att delarna alltid är hyperkuber av lägre dimensioner, och storheterna inom dessa har enheter därefter. Elevers svårigheter med olika enheter för objekt av olika dimensioner är ett välkänt problem inom geometriundervisningen. Kanske kan ett tydligare fokus på dimensionsbegreppet vara till hjälp för många elever?

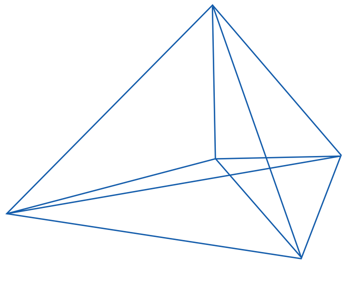
Man kan just undra hur det ser ut när Mr Mxyzptlk spelar tärning när det är 80 sidor! Eller kanske tärningen rentav ska hamna på en av de 10 hypervolymerna?

Fler objekt i högre dimensioner

Antag att vi, som tidigare, börjar med en punkt som dras ut till en sträcka i dimension 1. Men sedan fortsätter processen på ett annat sätt: Från mittpunkten på föregående objekt dras i rät vinkel en enda punkt ut tills nya, lika långa sträckor bildas. I dimension 2 blir det:



I den *liksidiga triangeln* som bildats finner vi sedan mittpunkten och drar ut vinkelrätt tills alla kanter är lika långa. Javisst, det blir en *tetraeder*! Om processen nu fortsätts, tar vi tag i mitten på tetraedern och drar ut en punkt vinkelrätt i den fjärde dimensionen. I centrerat perspektiv ser *pentaedern* ut så här:



Här får vi alltså 4 nya kanter, 6 nya ytor och 4 nya volymer plus en hypervolym jämfört med tetraedern. *Hexaedern* i femte dimensionen kommer sedan totalt att ha 6 hörn, 15 kanter, 20 sidor (liksidiga trianglar), 15 volymer (tetraedrar), 6 hypervolymer och en hyper-hypervolym. Verkar inte dessa tal bekanta? Återigen lämnas åt läsaren att finna talmönstret för tetraederns släktingar i olika dimensioner och formler för talen i det.

Frågan är om det finns andra, liknande mönster för andra geometriska objekt. I två dimensioner finns det oändligt många regelbundna månghörningar, men i tre dimensioner bara fem stycken regelbundna objekt, de välkända platonska kropparna: tetraedern, kuben, oktaedern, dodekaedern och ikosaedern. I fjärde dimensionen finns hela sex stycken regelbundna sk *fyr-polytoper*, och man skulle kanske kunna förvänta sig att det blir ännu fler i Mr Mxyzptlks värld. Dessvärre visar det sig att det från femte dimensionen och uppåt genomgående endast finns tre regelbundna polytoper. Här har visats två av dem, kubens och tetraederns familjer. Den tredje familjen är den som oktaedern ingår i.

Besök i en lägre dimension

Edwin A. Abbott skrev 1884 en märklig bok som har titeln *Flatland*. Den finns utgiven i sin helhet på svenska, och ett av kapitlen kan man även återfinna i Sigma, band 6. Berättelsen handlar om livet i en tvådimensionell värld, där invånarna är polygoner av olika slag. Ju högre rang man har i samhället, desto fler hörn har man. I boken berättas ingående hur invånarna i Flatland ser varandra och föremålen kring sig, t ex de femkantiga husen. Husens inre, som för oss rumlänningar är helt öppet för insyn, kan inte ses utifrån av flatlänningarna om dörrarna (linjer) är stängda.

En dag kommer en besökare från den tredje dimensionen. En punkt dyker plötsligt upp ur tomma intet. Punkten växer till en cirkel med allt större diameter. Främlingen berättar med en röst som tycks komma från ingenstans om en värld med tre dimensioner. Men ingen tror honom, eftersom det verkar så absurt och är omöjligt att förstå för Flatlands invånare. Till slut krymper cirkeln och försvinner i tomma intet.

Besökaren var alltså en sfär som passerat rakt igenom Flatland. Vad dess invånare såg var skärningen mellan deras tvådimensionella värld och sfären. När sfären var utanför planet, befann den sig i ”en annan dimension”, sett ur invånarnas synvinkel. När den passerade igenom planet syntes den som cirklar i olika storlek, beroende på var snittet var (se nedan).

Vi tänker oss nu en *hypersfär*, som består av punkter på samma avstånd (radien) till en medelpunkt i den fjärde dimensionen. Om denna ”besökare” passerar genom vår tredimensionella värld, skulle vi uppleva det som att en punkt uppstår ur tomma intet, punkten växer till en allt större sfär, varpå den åter krymper och till sist försvinner i tomma intet. Skulle vi försöka avbilda hypersfären, skulle den faktiskt se ut som en sfär.

En boll från den femte dimensionen skulle även den se ut som en sfär, avbildad i tre dimensioner, och också kunna dyka upp och försvinna. Den skulle kunna röra sig längs spår vi inte kan uppfatta, så att det t ex ser ut som om den flög. Massor och krafter skulle också de ha en högre dimension, plus att det kanske även skulle finnas andra fysikaliska lagar. De fantastiska förmågor som Mr Mxyzptlk besitter är alltså verkligen en matematisk följd av att han kommer från den femte dimensionen. Bäva månde Stålmannen!

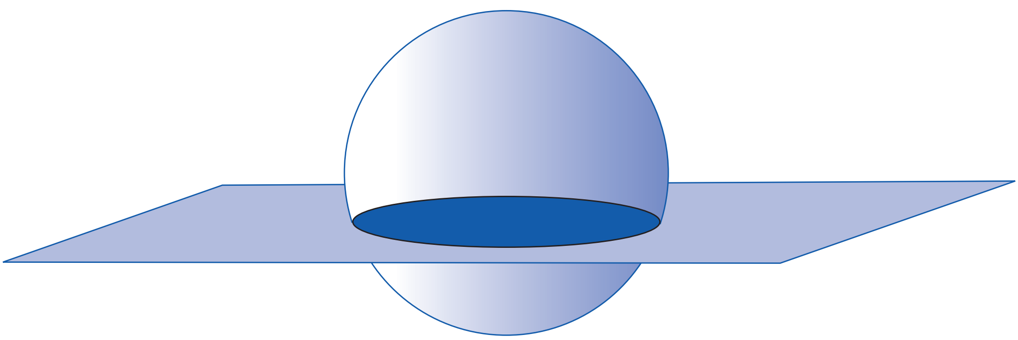
LITTERATUR

Abbot, E. A. (1986). *Flatland*. Sam J. Lundwall Fakta & Fantasi AB.

Bergqvist, T. (2003). Uppslaget. Hyperkuber. *Nämnaren*, 30(1), 32–34.

Siegel, J. & Yarbrough, I. (2005). The Mysterious Mr. Mxyztplk. I M. Egebjer (red.) *Superman – klassiska serier*. Egmont Kärnan AB.

Fotnot: I de första äventyren kallades han Mxyztplk, men 1959 bytte bokstäverna t och p plats, och detta är fram till dags dato hans officiella namn.



Omslagsbilden

Årets omslagstema är instrument. På framsidan av detta nummer kan ni se en gitarr, som rymmer många olika former av matematik. Själva kroppens kontur är uppbyggd av kurvor väl värda ett studium, rosetten består av en mängd små kvadrater och rektanglar som tillsammans skapar ett vackert geometriskt mönster. Banden tvärs över greppbrädan indelar det s k mensurmåttet (dvs stränglängden) i delningspunkter, vars avstånd från en nollpunkt nära stämskruvarna växer enligt formeln $M - M_k$ där

$$M_k = \frac{M}{(\sqrt[12]{2})^k} = M \cdot 2^{-\frac{k}{12}} \quad k = 1, 2, \ldots, 15 \text{ (eller ev 24)}$$

När fingret förkortar avståndet till stallet med ett bandmellanrum (dvs då *k* växer med en enhet), höjs tonen med ett halvtonsteg. Frekvens och stränglängd ändras då med var sitt konstanta logaritmvärde.