Thomas Lingefjärd & Sture Sjöstedt

Heltalspunkter på ellipsen

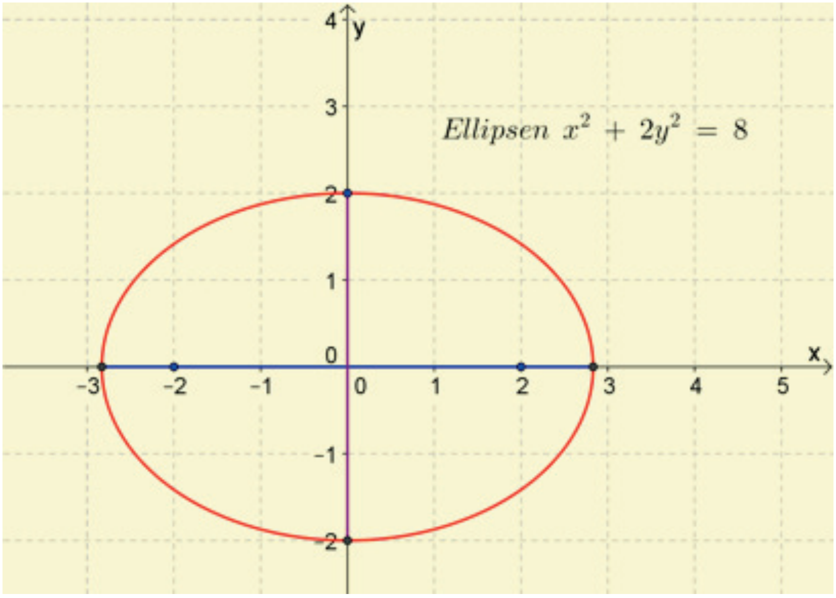
Att undersöka matematiska samband har alltid varit en drivkraft inom matematiska vetenskaper och ibland leder en sådan undersökning fram till oväntade relationer mellan olika matematiska delområden. Här uppehåller vi oss en stund vid den matematiska konstruktionen ellips.

Redan på 1600-talet upptäckte Johannes Kepler att planeternas banor runt solen inte är cirklar utan ellipser, vilket revolutionerade synen på vår omgivande rymd och bland annat ledde Isaac Newton in på idén om gravitationens lagar. Johannes Kepler hade ingen möjlighet att göra rymdresor så de tre lagarna är huvudsakligen empiriskt grundade framförallt på Tycho Brahes omfattande och noggranna observationer av planeten Mars.

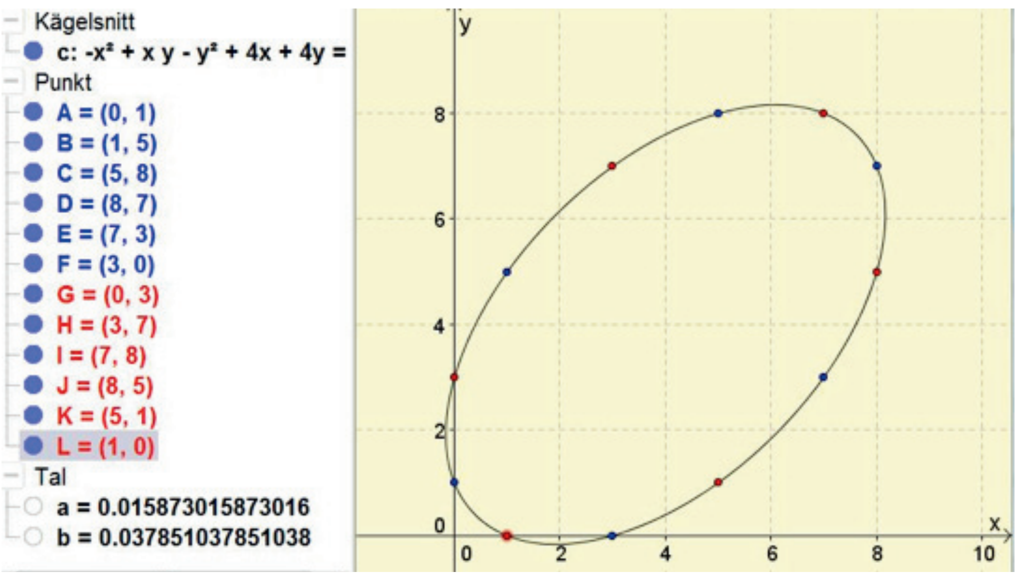
Keplers första lag:	Planetbanorna är ellipser med stjärnan i den ena brännpunkten.
Keplers andra lag:	Varje planet rör sig längs sin elliptiska bana med en sådan hastighet att en linje från planeten till stjärnan (radius vector) alltid sveper över en lika stor area på samma tid.
Keplers tredje lag:	Uttrycket $T^2/r^3 = k$ ger samma konstanta värde k för alla planeter som går i bana runt stjärnan, där T är planetens omloppstid och r halva storaxeln i ellipsen.

Det innebär bland annat att alla vi människor befinner oss på en planet som rör sig i en elliptisk bana runt solen. Förutom planeterna runt solen så går även de satelliter som vi skickar upp i rymden runt jorden i elliptiska banor där de skickar ut och tar emot signaler för TV, internet och många andra tjänster. En del av satelliterna är geostationära, det vill säga befinner sig på samma plats ovanför jorden när jorden snurrar. Det finns alltså anledning att ta upp området ellipser i undervisningen.

Vi ska här försöka knyta samman den geometriska upplevelsen av en ellips med rationella uttryck. En ellips är den geometriska orten för en punkt, vars avstånd till två givna punkter, brännpunkterna, har en konstant summa. Ett mått på ellipsens form är dess excentricitet, $e = c/a$ där c är halva avståndet mellan brännpunkterna och a halva storaxelns längd. Ju större excentriciteten är, desto mer tillplattad är ellipsen. Ellipsen kan även fås genom att ett diagonalt snitt läggs genom en kon.



I figuren ser vi att storaxeln är blå, lillaxeln är violett och själva ellipsen är röd. De två brännpunkterna är placerade i (-2, 0) och (2, 0). Om vi hade placerat brännpunkterna i (-1, 0) och (1, 0) så hade vi fått en rundare ellips. Hade vi flyttat dem längre utåt längs x-axeln så hade vi fått en plattare ellips och om vi hade placerat båda brännpunkterna i origo hade vi fått en cirkel som man kan betrakta som ett specialfall av den större kategorin ellips. Figurens ellips representeras symboliskt av $x^2 + 2y^2 = 8$.



Låt oss betrakta det rationella talet 13/819 = 0,0158730158730… Det visar sig att om vi bildar punkter i ett kartesiskt koordinatsystem genom att successiv skriva de decimala siffrorna enligt följande får vi

A = (0, 1), B = (1, 5), C = (5, 8), D = (8, 7), E = (7, 3) och F = (3, 0).

Dessa sex punkter ligger på en ellips. Om vi nu på samma sätt undersöker det rationella talet 31/819 = 0,037851037851… och gör på samma sätt med dessa decimaler får vi

G = (0, 3), H = (3, 7), I = (7, 8), J = (8, 5), K = (5, 1) och L = (1, 0).

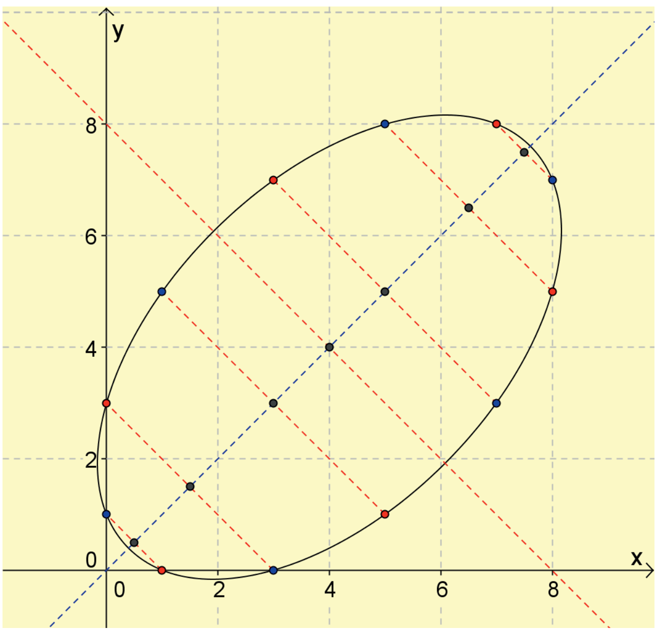
Det visar sig att alla dessa punkter ligger på samma ellips. Vi har fått en ellips med tolv punkter vars koordinater är heltal, så kallade *gitterpunkter*.

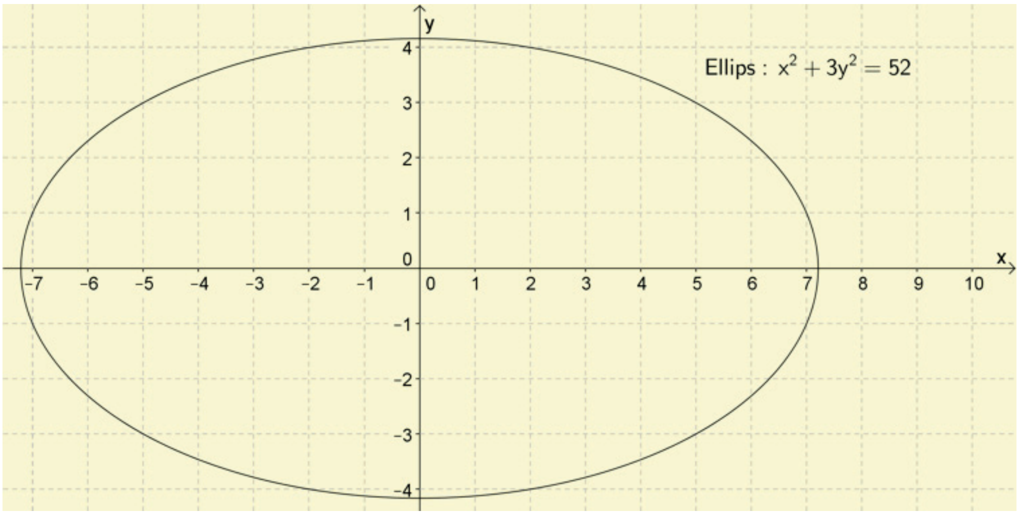
Även det rationella uttrycket 13000031/819000819 ger samtliga gitterpunkter på tolvpunktersellipsen, något som lämnas till läsaren att undersöka varför.

Om vi nu ritar in ellipsens storaxlar och speglar punkterna ser vi att en röd punkt speglas i en blå och att en blå punkt speglas i en röd. Detta visar att ellipsen är en figur med dubbel symmetri. Lägg märke till att ellipsens storaxel går genom origo och att ellipsens lillaxel går genom punkterna (8, 0) på x-axeln och (0, 8) på y-axeln.

Ellipsens allmänna ekvation kan skrivas som $x^2 - xy + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0$ men också på den enklare formen $r^2 + 3s^2 = 26$ där rs-systemet är ett kartesiskt koordinatsystem med origo i ellipsens centrum. De punkter som finns i första kvadranterna för dessa ellipser framgår av tabellen nedan. Punkterna i tabellens första två kolumner ligger på $x^2 - xy + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0$ och de i den högra delen ligger på $r^2 + 3s^2 = 26$. Av symmetriskäl kan vi konstatera att våra ellipser har tolv gitterpunkter då varje punkt i den första kvadranten går att spegla i de andra tre kvadranterna.

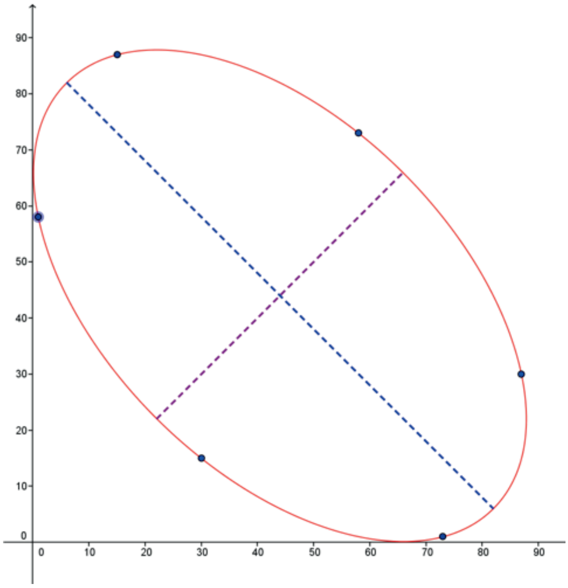
x	y	r	s
3	7	√2	2√2
5	8	5/√2	3/√2
7	8	7/√2	1/√2



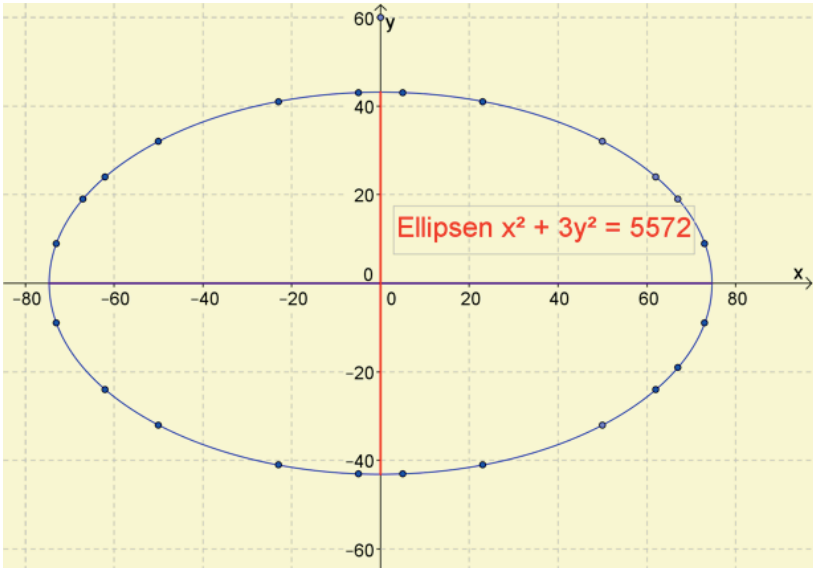


Ellipserna i artikeln är uppritade med GeoGebra, vilket är ett lättanvänt ritverktyg som gör att lärare kan ta upp ellipsen i undervisningen utan att eleverna behöver genomföra krångliga och tidsödande beräkningar. I GeoGebra kan du antingen skriva in $x^2 + 3y^2 = 52$ direkt på inmatningsraden eller definiera fem punkter och välja menyalternativet *Kägelsnitt genom fem punkter.* Vi överlåter åt läsarna att på samma sätt som ovan avgöra om de fem punkter som bråket 15873/99999 ger ligger på en ellips.

Däremot vill vi visa att om vi återigen studerar 13/819 = 0,0158730158730… och tar två siffror i taget så får vi punkterna (01,58), (58,73), (73,01), (15,87), (87,30), (30,15). Det visar sig att även dessa ligger på en ellips, även om denna ellips lutar åt andra hållet och är mycket större än den tidigare ellipsen. Du ser säkert att de sex punkter som visas i figuren ligger symmetriskt och därigenom ger de upphov till var fler gitterpunkter kan tänkas ligga. En sådan undersökning kan vara algebraisk och med fördel utföras med hjälp av ett kalkylprogram.



Avslutningsvis visar vi i den sista figuren nedan en ellips med ett stort antal gitterpunkter.



Vill du läsa mer om samband mellan rationella tal och ellipser så finns en artikel på engelska att tillgå på http://teachersofindia.org/en/article/atria-connections-between-geometry-and-number-theory.

Denna artikel finns också att läsa på svenska GeoGebrainstitutet.