

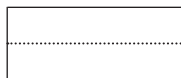
## Analysera mera i geometri

Inom undervisningen i geometri behöver vi utmana elevernas nyfikenhet med frågeställningar och ge dem tid att undersöka geometriska objekt. Praktiskt arbete där eleverna själva upplever och upptäcker samband ökar möjligheten att förstå geometri. Eleverna behöver många tillfällen att få resonera, diskutera och göra egna erfarenheter.

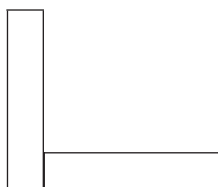
Under en forskningscirkel, som vi matematikutvecklare i Göteborg har fått möjlighet att delta i, har jag undersökt geometriundervisning lite närmare. Med hjälp av handledarna Johan Häggström och Kaj Jönsson från Göteborgs universitet har jag försökt att ta reda på hur lärare undervisar i geometri och jämfört detta med några forskares uppfattning om geometriundervisning. Vi vet att geometri är något som många har bekymmer med.

En uppgift som fanns med i TIMSS 2007 för att testa elevernas förståelse för konservervation av area var denna:

Jill hade ett rektangulärt papper.



Hon klippte pappret längs den streckade linjen och gjorde en L-form, så här:



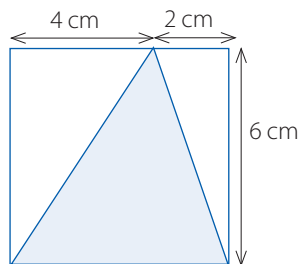
Vilket av dessa påståenden är sant?

- A. L-formens area är större än rektangelns yta.
- B. L-formens area är lika stor som rektangelns yta.
- C. L-formens area är mindre än rektangelns yta.
- D. Det går inte att räkna ut vilken area som är störst utan att mäta.

Endast 39,7% av eleverna i åk 4 valde alternativ B, dvs att arean var densamma som före klippningen. Redovisning och diskussion kring uppgiften finns i P O Bentleys studie *Svenska elevers matematikkunskaper i TIMSS 2007*.

En annan uppgift från TIMSS 2007 prövar elevernas förmåga att tillämpa area-begreppet på en triangel:

Figuren visar en skuggad triangel i en kvadrat. Vilken area har den skuggade triangeln?



42% av eleverna i åk 8 klarade den uppgiften.

I Nämnaren nr 1, 2010 skriver Madeleine Löwing och Wiggo Kilborn om sin undersökning av 20 000 elevers kunskaper i geometri:

*Area är ett område där många elever saknar känsla och begrepp. Medan eleverna inte har några större svårigheter att använda enkla förutbestämda formler, så får de problem när de ställs inför nya situationer där de inte direkt kan använda någon formel. (s 13)*

Beror elevernas svårigheter på att de inte har fått göra undersökningar och fått egna erfarenheter? Gör eleverna beräkningar utan att förstå vad de gör?

## Geometri i Lgr 11

Under rubriken Centralt innehåll anges vad undervisningen i geometri ska behandla. För åk 1–3 och 4–6 är det grundläggande geometriska objekt samt deras inbördes relationer. Eleverna ska även arbeta med grundläggande geometriska egenskaper hos dessa objekt och undervisningen ska ge eleverna tillfälle att konstruera geometriska objekt. De ska jämföra och uppskatta matematiska storheter och de ska få lära sig metoder för hur omkrets och area hos olika tvådimensionella geometriska figurer kan bestämmas och uppskattas. Under arbetet ska också olika förmågor utvecklas, så att eleverna utvecklar intresse för matematik och tilltro till sin förmåga att använda matematik. Betoningen ligger på att konstruera, beskriva, använda, analysera, formulera och samtala.

Geometriska objekt och deras egenskaper är ett genomgående innehåll i alla årskurser. Den övergripande progressionen i mötet med geometriska begrepp och objekt utgår från de konkreta formerna, deras egenskaper och relationer för att successivt övergå till olika objekts egenskaper och relationer i matematiska sammanhang, till exempel vid beräkningar av omkrets, area och volym.

*Kommentaren till kursplanen, under rubriken "Geometriska objekt och dess egenskaper", s 18.*

## Lärare beskriver sin undervisning

Jag är nyfiken på varför vår undervisning i geometri inte leder till att eleverna får tillräckliga kunskaper. I den forskarcirkel som jag deltog i valde jag därför att låta 40 lärare som undervisar i matematik svara på en enkät med frågor om sin undervisning. Min undersökning omfattar lärare från förskoleklass till åk 9. Drygt hälften av lärarna undervisar i åk 1–3 och deltar i våra

handledningsgrupper i "Läsa/skriva/räkna-satsningen". Resten arbetar i åk 4–6 eller med specialundervisning. Jag har dessutom genomfört en intervju med tre lärare som undervisar i åk 6–9.

Några frågor handlade om hur lärarna planerar sin undervisning. Utgår de från läroplanens mål eller följer de bokens upplägg? Andra frågor handlar om hur undervisningen utformas. Använder de konkret material och i så fall hur? Undervisar de i symmetri och får eleverna lösa geometriska problem? Lärarna fick också beskriva vad de gör om de går utanför klassrummet för att ha geometriundervisning.

De flesta lärarna uppger att de alltid har målen som grund för planeringen även om de utgår från läroboken. Många berättar att de arbetar praktiskt i klassrummet och i skogen. Detta gäller främst de lärare som undervisar de yngre eleverna. Hälften menar att de känner sig säkra på och behandlar symmetri i matematik och i bildundervisningen. Men hälften av lärarna känner sig osäkra och undervisar inte om symmetri. Endast hos några få ingår problemlösning som en del av geometriundervisningen. Ett par lärare uppger att de har använt Känguruproblem.

Alla lärare i min enkätundersökning berättar att de låter eleverna hitta olika geometriska former i sin omgivning. De formar figurer med pinnar, kottar, rep och de använder logiska block, tangram, tandpetare mm. Några lärare låter eleverna bygga geometriska kroppar av snö och sand. Eleverna får lära sig att känna igen figurerna och att göra beräkningar av t ex area och omkrets.

Endast några få uppger att de arbetar med beskrivning av geometriska formers egenskaper och inbördes relationer. Ingen berättar att de utmanar elevernas nyfikenhet med att låta dem själva undersöka figurerna och ta reda på deras egenskaper och hur de förhåller sig till varandra.

Lärarna i åk 6–9 stannar i klassrummet och eleverna arbetar mestadels med beräkningar i läroboken eller med lärarnas egenproducerade uppgifter. Ibland förekommer praktiska exempel, men då oftast för att exemplifiera något som en elev inte har förstått. Även bland lärare som undervisar yngre elever är läroboken oftast utgångspunkten och sedan kompletterar de med annat material. "Geometri inbjuder till att arbeta praktiskt", uttryckte en lärare. Men vad menas med att arbeta praktiskt? Innebär praktiskt arbete också undersökande arbete?

## Läromedlen

I de flesta läromedel finns uppgifter där eleverna ska visa att de kan känna igen och namnge geometriska former och kroppar. Det finns inte många uppgifter av undersökande karaktär där objekten ska jämföras med varandra och där deras egenskaper ska beskrivas. Konstruktion av former och kroppar förekommer endast sparsamt i läroböckerna. Symmetri behandlas i läromedel för de yngre åldrarna och där utnyttjas samverkan med andra ämnen t ex bild. Mätning med gamla och nya mått ger möjligheter till praktiskt arbete och sådana uppgifter finns det i läroböckerna. Det som tar störst utrymme är beräkningar av area, omkrets, vinklar, volym och skala. Den typ av uppgifter som dominerar i läroböckerna är av karaktären beräkningsprocedurer. Bara något enstaka läromedel innehåller flera aktiviteter där eleverna uppmanas att göra egna undersökningar. Om man bara följer läromedlen blir det alltså inte så många tillfällen för eleverna att undersöka och få egna erfarenheter.

## van Hiele-nivåer

I boken *Geometri och statistik* beskriver Rolf Hedrén de två holländska forskarna Dina och Pierre van Hieles idéer om hur elevers tänkande i geometri utvecklas. De beskriver fem nivåer med successivt ökande abstraktion och anser att den mesta inlärningen följer dessa nivåer.

Eleverna når nivåerna i tur och ordning och kan enligt van Hiele inte hoppa över någon nivå. Kompletterande forskning har dock visat att elever kan befinna sig på olika nivåer beroende på vilket moment i geometrin man behandlar och också att de under arbete med en uppgift kan alternera mellan nivåer. För att lyckas på en nivå måste eleverna ha tillägnat sig strategierna på den föregående nivån. Alla elever behöver inte nå den högsta nivån och det är antagligen bara några få som kommer att arbeta på den.

För läraren är det viktigt att anpassa undervisningen och det språk som används till de nivåer där eleverna befinner sig. Risken är annars att de får arbeta med uppgifter på en för hög nivå och inte förstår vad läraren pratar om.

### *van Hieles 5 nivåer*

1. *Igenkänning* (visualisering). Eleven lär sig vissa termer och känner igen en geometrisk figur som en helhet. Eleven tar ingen hänsyn till figurens delar. En elev på denna nivå kan till exempel känna igen en bild av en rektangel men är i allmänhet inte medveten om några egenskaper hos rektangeln, som t ex att den har parallella sidor. Eleven liknar lika gärna rektangeln med t ex en dörr eller en fönsterruta.
2. *Analys*. Eleven kan analysera egenskaper hos figurer empiriskt genom att vika papper, mäta, rita på rutat papper eller använda geobräde. På denna nivå kan eleven inse att motstående sidor hos en rektangel är parallella och kongruenta men hon kan ännu inte se sambandet mellan rektanglar eller kvadrater och rätvinkliga trianglar. Hon vet heller inte att en kvadrat kan ses som en rektangel eller som en romb.
3. *Abstraktion*. Eleven kan logiskt ordna figurer, t ex alla kvadrater är rektanglar, men alla rektanglar är inte kvadrater. Hon förstår de inbördes sambanden mellan figurer och inser vikten av korrekta definitioner. Även om hon förstår sambandet mellan mängden av kvadrater och mängden av rektanglar samt mellan mängden av rektanglar och mängden av parallelogrammer, kan hon inte härleda varför t ex diagonalerna i en rektangel är kongruenta. Hon förstår inte deduktionens roll i geometrin.
4. *Deduktion*. Eleven förstår vikten av deduktion och den roll axiom, satsar och bevis spelar i geometrin. På denna nivå kan eleverna använda axiom för att bevisa påståenden om t ex rektanglar och trianglar, men hennes tänkande är i allmänhet inte så precist att hon förstår nödvändigheten av axiom.
5. *Stringens*. Eleven förstår vikten av precision, när man arbetar med geometris grunder, som t ex Hilberts axiomsystem för geometrin. Hon kan utveckla en teori utan användning av konkreta föremål. Hon kan t ex analysera och jämföra euklidisk och icke-euklidisk geometri.

Hedrén i *Geometri och statistik*, s 28.

## van Hiele som stöd för undervisningen

Elevernas bristande kunskaper i geometri skulle kunna bero på hur vi arbetar inom geometriundervisningen. Om vi ser på undervisningen med hjälp av van Hiele-nivåerna kan vi kanske få syn på möjliga förklaringar till elevers svårigheter. Vi inleder med att arbeta på nivå 1 där eleverna lär sig att känna igen och namnge olika geometriska former och kroppar. Vi tycker att vi har arbetat både praktiskt och teoretiskt. Sen låter vi eleverna göra beräkningar och arbeta på en abstrakt nivå, dvs vi har kommit till nivå 3. Vi upptäcker att eleverna har problem med begrepp och att de får svårigheter att utföra beräkningar. Dessa svårigheter kan bero på att på att vi inte låter eleverna arbeta tillräckligt med att empiriskt analysera formernas egenskaper. Vi har helt enkelt hoppat över nivå 2, där sådant arbete sker.

Forskning och olika rapporter tyder på att vi behöver ge eleverna mer tid till undersökande verksamhet, alltså ägna mer tid till nivå 2 *Analys*. Min egen undersökning pekar i samma riktning. Det är ett viktigt steg för att senare kunna arbeta på en abstrakt nivå och göra beräkningar.

I alla åldrar från förskolan och uppåt behöver eleverna skaffa sig egna praktiska erfarenheter. De måste ges möjligheter att undersöka, jämföra och diskutera med varandra. Tillsammans kan vi sedan samtala, argumentera och bygga kunskap. Detta måste få ta tid för att det fortsatta arbetet inte ska bli för svårt. Våldigt få förstår Pythagoras sats efter att bara ha studerat en figur i en lärobok.

## En uppgift kring sambandet mellan omkrets och area

Lägg en rektangel av 12 tändstickor.

Förhoppningsvis hittar eleverna tre möjligheter att lägga rektanglar. Om eleverna inte vet att kvadraten är en rektangel så kan det bli en anledning att diskutera detta.

Tänk er att rektangeln är en kohage. I vilken hage har kon det största området att röra sig på?

Många intressanta diskussioner kan uppstå. För att ta reda på vem som hade rätt kan det vara bra att ha klippt ut kvadrater som har sidan lika lång som en tändsticka. Resultatet är inte alltid det som man förväntar sig.

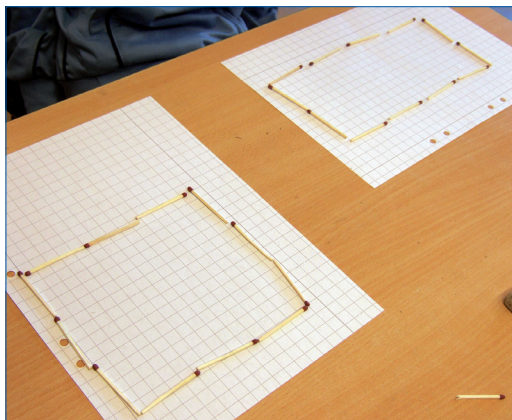
Vilken bonde har fått sätta upp det längsta staketet?

Inte heller detta är självklart för alla. Eleverna bör då få tid på sig att prova igen med alla 12 tändstickorna.

Det går bra att göra uppgiften utan centimeterutrat papper, men om man vill utöka uppgiften och senare rita av figurerna och göra beräkningar kan sådant vara bra. Samma övning kan också göras utomhus med rep som formas till olika rektanglar. Då kan man konstruera en kvadratmeter av pinnar och undersöka hur arean förändras när rektangelns form ändras.

Denna övning på van Hiele-nivå 2 är intressant att prova i alla åldrar. Jag har använt den både med sexåringar och med vuxna. När någon direkt säger "Det är klart att arean är lika stor, vi har ju använt lika många tändstickor" är det intressant att studera deras reaktion när de sedan provar sig fram.

Liknande aktiviteter finns på Strävorna: [ncm.gu.se](http://ncm.gu.se)  
tex  
1C Rektangel  
2C Stickor kors och tvärs  
1C Area med stickor.

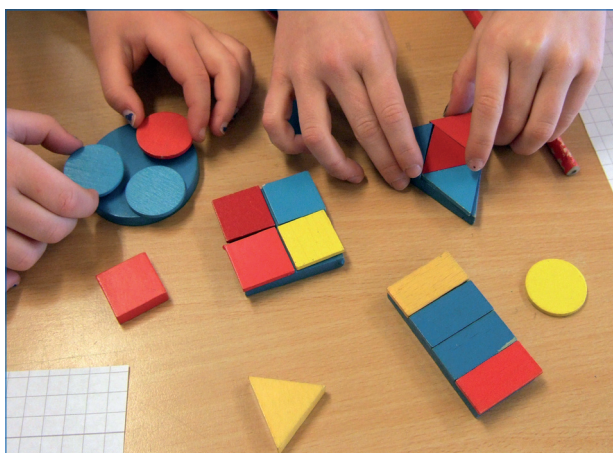


## Längdskala – areaskala

I boken *Hur många prickar har en gepard?* finns många övningar där eleverna kan göra egna upptäckter. Här är ett exempel med logiska block som jag har provat med elever i årskurs 2. Eleverna skulle ta reda på hur många små figurer som fick plats på den större.

En elev sa, efter att ha lagt bitarna, att det blir "ett till fyra". Det blev en intressant diskussion kring om förhållandet 1:4 även skulle gälla för cirkelnarna. En elev ritade av figurerna på papper och de andra eleverna fick fundera på om mellanrummen i cirkeln tillsammans blev lika stort som en cirkel. Efter att ha klippt ut bitarna blev alla övertygade om att det kunde stämma.

Eleverna fick rita av sina upptäckter i räknehäftet. Att göra ett antagande och sedan ta reda på resultatet är spännande redan i de lägre åldrarna, och att klippa ut i papper och pröva sina antaganden ökar förståelsen. Eleverna fick sitta tillsammans och diskutera med varandra vilket också gav möjlighet att utveckla andra förmågor förutom begreppsförståelse, bla förmågan att resonera och argumentera.



## Min slutsats

Det verkar som om fler laborationer med samtal och analyser kan öka elevernas kunskaper i geometri. Om vi låter eleverna undersöka och analysera mer, dvs om vi undervisar mer på van Hiele-nivå 2, ger vi eleverna större möjlighet att förstå geometrin.

### LITTERATUR

- Bentley, P. O. (2008). *Svenska elevers matematikkunskaper i TIMSS 2007* [www.skolverket.se/publikationer](http://www.skolverket.se/publikationer)
- Bentley, P. O. (2009). TIMSS 2007. En djupanalys av svenska elevers matematikkunskaper. I *Nämnnaren nr 2*, s 4–8.
- Bergius, B. & Emanuelsson, L. (2008). *Hur många prickar har en gepard?* NCM, Göteborgs universitet.
- Genow, S. & Wallby, K. (2010). *Geometri och rumsuppfattning – med Känguruproblem*. NCM, Göteborgs universitet.
- Hedén, R. (1992). Van Hiele-nivåer och deras betydelse för geometriundervisningen. I G. Emanuelsson, B. Johansson & R. Ryding (red) *Geometri och statistik*. Lund: Studentlitteratur.
- Löwing, M. (2011). *Grundläggande geometri. Matematikdidaktik för lärare*. Lund: Studentlitteratur.
- Löwing, M. & Kilborn, W. (2010). Elevers kunskaper i mätning och geometri. I *Nämnnaren nr 1*, s 10–17.
- Skoogh, L. (1979). Några tankar om geometriundervisningen I P. Claeson (red) *Matematikämnet i skolan*. Stockholm: Liber.