Ronny Ahlström

Variabler och mönster

Det är viktigt att eleverna får förståelse för grundläggande matematiska begrepp. Ett sätt att närma sig variabelbegreppet är via mönster som beskrivs med formler. Här beskrivs och diskuteras hur ett sådan arbete kan gå till.

Jag tror att alla lärare introducerar bråk med stöd av något slags konkret materiel. Vi går inte direkt på det matematiska symbolspråket utan låter eleverna arbeta laborativt och få konkret stöd. På motsvarande sätt behandlar vi areabegreppet. Vid problemlösning uppmanar vi eleverna att rita bilder som stöd för sitt tänkande. Det är en utmärkt metod för att eleven ska skapa förståelse för begrepp. Det allra bästa är kanske att bygga på elevernas erfarenheter och utnyttja vardagsspråk som beskriver situationen.

Ronny Ahlström är fortbildare och lärare i matematik i grundskolans senare årskurser.

När det gäller variabelbegreppet är situationen annorlunda. Eleverna har oftast inte direkta konkreta erfarenheter som vi kan bygga på. Istället måste vi i skolan skapa tillfällen som ersätter vardagssituationer, som i andra sammanhang ger en grund för undervisningen. Det kan vara schematiska figurer, laborationer eller annan konkretion.

Givetvis kan det vara frestande att kortsiktigt spara tid genom att direkt använda symbolspråket men förr eller senare brukar det straffa sig.

Förförståelse

Alla elever har intuitiv förförståelse för bråk- och areabegrepp, som kan utvecklas till mer matematisk förståelse. De flesta har någon gång varit med om att dela en pizza i mindre bitar (bråkdelar) och har därmed en intuitiv förståelse för att t ex 1/5 är mindre än 1/3. På motsvarande sätt har eleverna klart för sig att en viss sandlåda eller fotbollsplan är större än en annan. Därigenom har eleverna en intuitiv förståelse för areabegreppet.

Hur börjar vi?

Självklart är målet att eleverna ska kunna hantera den symboliska algebran. Här vill jag dock uteslutande sätta fingret på frågan ”Hur börjar vi?” Det handlar om att skapa undervisningstillfällen som hjälper eleverna att utveckla förståelse för att bokstäverna betecknar tal eller storheter samt att se poängen med att använda bokstäver. Detta bör bara till en mycket ringa del handla om att ”räkna med bokstäver” eftersom det kan vara mer utvecklande att teckna samband, föra logiska resonemang och lösa problem. Låt oss lämna en del av den terapeutiska förenklingsalgebran bakom oss. Givetvis är färdighetsträning nödvändig men den bör komma först när eleverna förstår vitsen med att använda bokstäver.

Konkreta mönster

Att arbeta med mönster är numera en väl beprövad metod när det gäller att studera generella samband för att skriva dessa med ett matematiskt symbolspråk. På det sättet kommer variabelbegreppet in på ett naturligt sätt. Det är en konkret modell som hjälper eleverna över initialsvårigheterna och som också belyser poängen med variabelbegreppet. Formelsambandet gäller ju för vilket värde som helst på variabeln.

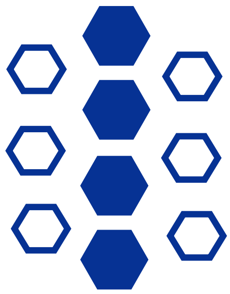
Givetvis löser metoden inte alla problem på en gång. Mönster är en bra hjälp där eleverna kan erbjudas många relativt enkla uppgifter med stor variation. Jämför återigen gärna med bråkbegreppet som vi vet att många elever har svårt att förstå och arbeta med, trots att vi återkommer till det många gånger.

Mönstret växer

Figurerna visar hur mönstret med ljusa och mörka stenar växer och kommer att växa i fortsättningen. Det ligger alltid 3 ljusa stenar på var sin sida om de mörka stenarna. Erfarenhetsmässigt vet vi att även eleverna inser detta och att de finner uppgifterna stimulerande.

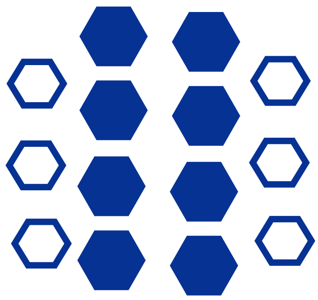
Inledande frågeställningar

Med utgångspunkt i bilderna finns det lämpliga frågeställningar för att utveckla tänkandet med olika krav på abstraktionsförmåga:



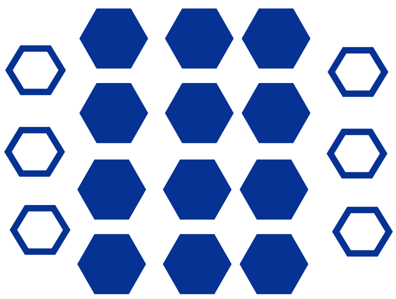
Totala antalet stenar:
$4 + 6 = 10$

Figur 1



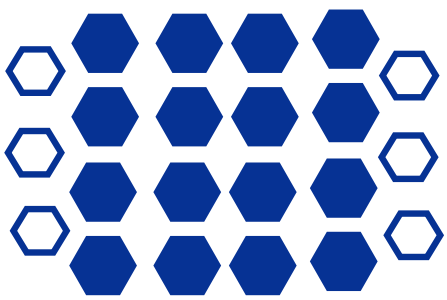
Totala antalet stenar:
$2 \cdot 4 + 6 = 14$

Figur 2



Totala antalet stenar:
$3 \cdot 4 + 6 = 18$

Figur 3



Totala antalet stenar:
$4 \cdot 4 + 6 = 22$

Figur 4

1 Hur många svarta stenar är det i den 5:e figuren? I den 8:e figuren? I den 10:e figuren?

2 Förklara med egna ord hur du kan räkna ut det totala antalet stenar i den 10:e figuren, i den 50:e figuren, i vilken figur som helst.

Ett formelsamband

Med stöd av mönstret och inledande frågeställningar är det dags att ta ytterligare ett steg och skriva det generella sambandet med symboler. Med tanke på att mänskligheten – första gången – klarade av detta så sent som för ungefär 400 år sedan, ska vi inte förvänta oss att alla elever tar detta steg direkt på egen hand. Till stor del är det ju frågan om skrivkonventioner.

Antal stenar figur x	=	Antal rader med svarta stenar	$\cdot$	4	+	6
S	=	x	$\cdot$	4	+	6

Skrivkonventioner

Notera skrivsättet i formeln ovan. Det är mer naturligt för eleverna att skriva produkten $x \cdot 4$ istället för $4 \cdot x$. Så småningom kommer eleverna att acceptera skrivsättet $4x$ som en effektiv skrivkonvention, men till att börja med är $x \cdot 4$ naturligast. Det finns anledning att klargöra att bokstaven S inte är en förkortning för ordet ”stenar” utan det är en beteckning för antalet stenar. Därför finns det också anledning att variera valet av bokstäver, vilket naturligtvis även gäller bokstaven som betecknar variabeln.

Fler frågeställningar

Med eget språk kan elever berätta hur man räknar ut antalet stenar i ”vilken figur som helst”. Det kan t ex låta så här:

Jag tar figurens nummer och multiplicerar det med 4 eftersom det är 4 i varje sådan rak rad och sedan tar jag det svaret och lägger till dom 6 vita stenarna …

Det kan vara bra att stanna upp ett ögonblick och låta eleverna jämföra formeln med hur de med egna ord beskriver hur antalet stenar räknas ut. För reflektionens skull kan man ställa frågor som:

3 Vad motsvarar talet 4 i formeln? Talet 6? Vad betecknar x och S?

Utvärdera formeln

Nu när formeln finns till hands är det lämpligt att beräkna värdet på S för olika värden på variabeln x. ”Hur många stenar är det i figur nummer 35?”

$S = x \cdot 4 + 6$ ger med $x = 35$ antalet stenar:

$$S = 35 \cdot 4 + 6 = 140 + 6 = 146$$

För att visa på att formeln gäller för vilket värde som helst på x, kan man ge utlopp för lite fantasi och klämma till med en extremt lång figur. Varför inte ”figur nr 5 000”?

$$S = 5\,000 \cdot 4 + 6 = 20\,000 + 6 = 20\,006$$

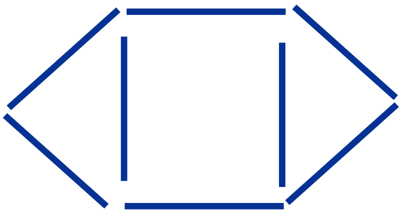
Det är inte alltid lätt för eleverna att inse att en del av matematikens styrka ligger i att vi kan arbeta med generella regler, samband och problemlösningsmetoder. Men hur ska de någonsin inse det om de inte någon gång får börja att provsmaka?

Arbeta laborativt

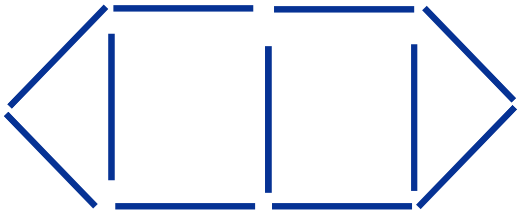
Mönstret med stenar som visats kan med fördel byggas laborativt t ex med vita och svarta papperslappar, knappar eller andra lämpliga föremål. Man kan anpassa frågorna och resonemangen till elevernas mognad och abstraktionsförmåga.

Det finns trevliga exempel på tändsticksmönster som också passar bra för laborativt arbete. Resonemangen kan likna de ovan. Mönstren måste inte vara symmetriska men erfarenhetsmässigt har eleverna lättare att se hur mönstret är uppbyggt och hur det fortsätter att växa.

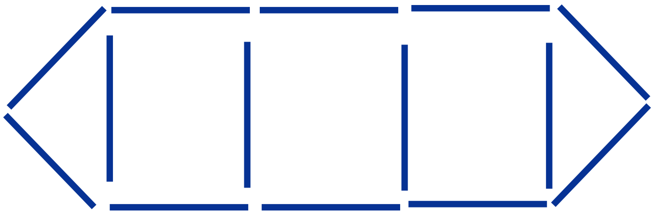
Här ser vi ett exempel som jag i sam-



Figur 1



Figur 2



Figur 3

band med laborativt arbete brukar kalla för ”kanoterna”. Visst ser figur 3 ut som en tremanskanot.

Vi kan t ex beteckna figurens nummer med x och antalet stickor med T. Eftersom antalet stickor ökar med 3 för varje ny figur ska faktorn $x \cdot 3$ finnas med i formeln. I den första figuren finns ytterligare 5 stickor som återkommer i alla figurer. För att det ska stämma adderar vi hela tiden 5. Sambandet är $T = x \cdot 3 + 5$.

På UPPSLAGET i detta nummer finns flera exempel på mönster med stickor.

Om förståelse

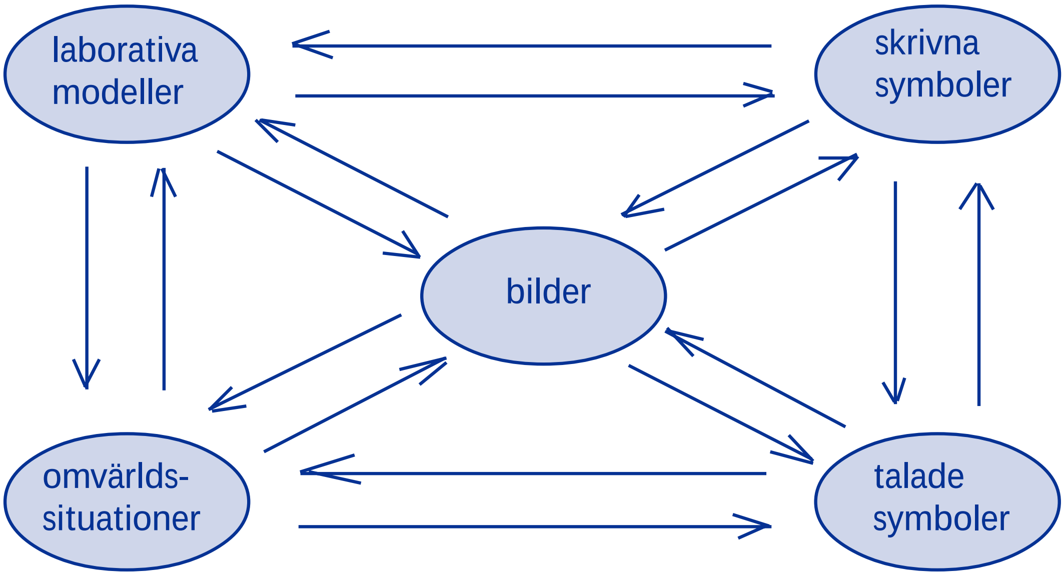
Vad innebär det att förstå? Det är förstås svårt att beskriva men alla lärare har säkert känt tillfredsställelsen när eleven fått en aha-upplevelse. Som lärare kan vi inte *ge* eleven förståelse. Däremot kan vi med vår undervisning skapa goda tillfällen då eleven successivt bygger upp och erövrar förståelse. Eleverna får den knappast genom lärarens övertalningsförmåga eller via metodiska supertrick. Snarare handlar det om att eleverna successivt arbetar in en personlig förståelse genom att vi belyser begreppet dels via många lätta problem med stor variation, dels genom att vi i vår undervisning gör översättningar av begreppet mellan olika sätt att beskriva det.

Figuren till höger har hämtats från *Kommentarer till grundskolans kursplan och betygskriterier i matematik*, utgiven av Skolverket. Den visar hur vi kan göra översättningar mellan olika representationer. När det gäller algebra har vi av tradition fastnat i det övre högra hörnet. För att nå förståelse för variabelbegreppet och se det meningsfulla med algebra är det viktigt att eleverna får arbeta med uppgifter som kräver att man pendlar mellan uttrycksformerna.

Det kan handla om att gå från en laborativ eller konkret modell till en bild eller ett diagram för att sedan via vardagsspråk och skriftspråk komma vidare till matematiktermer och symboler.

Enligt min erfarenhet bygger såväl vi vuxna som våra elever undan för undan allt fler personliga mentala bilder som sedan kan fungera som ytterligare stöd vid dessa översättningar.

Vad innebär det då att förstå matematik? Svaret har kanske delvis att göra med



att intellektet utvecklas och förståelsen fördjupas just när eleven gör de översättningar pilarna visar. En spännande fråga:

Hur utvecklas matematisk förståelse när eleven utför översättningar mellan olika uttrycksformer?

Är x alltid en variabel?

Det är onekligen förvirrande för elever (och lärare) att en bokstav, ofta *x*, skriven i en ekvation knappast kan betraktas som en variabel. Det är snarare beteckning för ”en tillfällig konstant”, dvs en storhet eller ett tal som via ekvationslösningen ska ”låsas fast” vid ett visst värde (ev vissa värden). När vi arbetar med formelsamband, bevisar generella räkneregler eller genomför algebraiska bevis, så är ju själva poängen att talet inte är fastlåst. Istället är det ju så att bokstaven, alltför ofta *x*, tillåts variera och vara vilket tal som helst, dock kanske bara inom de naturliga talen eller begränsat på annat sätt.

Detta är enligt min mening något mycket väsentligt som måste klargöras i matematikundervisningen.

Förståelse av variabelbegreppet

Som matematiklärare kan det vara svårt att tänka sig in i elevernas svårigheter. Vi har ju själva knäckt koderna och uppövat färdigheter, t ex när det gäller förenklingar.

Färdighetsträning får inte leda till att våra elever i alltför stor utsträckning utför procedurer utan förståelse. De måste få tillräcklig tid att reflektera över begreppen, föra logiska resonemang och lösa problem.

Att arbeta med mönster är inte det enda lämpliga sättet att introducera variabelbegreppet. Det är ett bland många sätt som kan medverka till att eleverna når förståelse.

Styrkan med att inledningsvis arbeta med mönster ligger i att det ger oss möjligheter att arbeta laborativt, föra diskussioner utifrån konkret material eller ritade figurer och göra översättningar mellan olika representationsformer. Dessutom kan eleverna se poängerna med bokstavsuttryck eftersom en formel visar det generella sambandet skrivet på ett tydligt och kortfattat sätt med ett (matematiskt) språk som är internationellt. Många lärare har berättat att eleverna dessutom tycker att det är roligt att arbeta med mönster. Det tycker jag är roligt att få veta!