Kraften i det odelade 5-talet

***Dagmar Neuman**, forskare vid Göteborgs universitet, har läst artikeln* Matematikundervisning och hemspråk *i Nämnaren 100. Här redovisar hon sin uppfattning av forskningsresultaten kring det odelade femtalets roll, och bidrar med synpunkter och frågor till debatten om den grundläggande matematikinlärningen.*

Jag läste med intresse Wiggo Kilborns artikel i Nämnaren 100 om de inhemska språken i Moçambique, med sin ”dolda fembas”. Wiggo börjar sin artikel med att berätta om de dåliga resultaten i primärskolans undervisning i Moçambique. Undervisningen bedrivs på portugisiska, men bara ca 25 % av eleverna talar portugisiska hemma. Wiggo rekommenderar att barnen ska få lära sig räkna på de inhemska språken ”*med en metodik som bygger på fingerräkning och som direkt ger rätt struktur åt arbetet i fembas.*”

Mitt intresse för Wiggos artikel berodde på att jag själv har iakttagit hur många svenska barn redan före skolstarten har format en ”femstruktur” i de 10 första talen med hjälp av sina fingrar. I min undersökning intervjuades 105 nybörjare. Undersökningen rapporterades i min avhandling (1987) och i min bok *Räknefärdighetens rötter* (1989).

Precis som Wiggo gör nu, gjorde jag då bedömningen att alla barn bör få hjälp att upptäcka den ”femstruktur” som finns fördold i deras ”kroppsspråk”, och att de barn som har börjat forma den ska få fortsätta att använda den i skolan. I ett tvåårigt undervisningsexperiment med två nybörjarklasser undervisades barnen enligt dessa principer. Resultatet, som blev över förväntan, finns också rapporterat i min avhandling.

Subtraktion är svårt i alla kulturer

Wiggo beskriver hur mycket svårare det är för barnen i Moçambique att subtrahera än att addera. Han har tidigare (Kilborn, 1989) visat att detta gäller för svenska elever.

En forskargrupp (Fischbein et al, 1985) som har studerat hur vi upplever olika räknesätt visar hur barn och även vuxna ofta tänker enligt ”primitiva modeller”. Barn upplever t ex subtraktion på minst två olika sätt, säger de: som ”bygga upp” (2 + _ = 9: Du har 2 kr och ska köpa något som kostar 9. Hur många kronor fattas?) och som ”ta bort” (9 – 7 = _: Du har 9 kr och handlar för 7. Hur många kronor är kvar?)

Andra forskare (t ex Carpenter & Moser, 1982) visar att barn använder olika räknestrategier för dessa olika typer av subtraktion: additiva för ”bygga upp” och subtraktiva för ”ta bort”. Då blir det svårt att lösa problemen ovan. Man kan t ex inte ”räkna på från största” i en addition utförd för att lösa en subtraktion, där den största delen är okänd, som i 2 + _ = 9. Man kan lösa problemet genom att räkna upp orden 3 t o m 9. Men eftersom korttidsminnet är begränsat blir det omöjligt att hålla reda på så många ord utan en ”hålla-reda-på”-metod.

De barn som börjar räkna så använder ”fingerräkning som räkneteknik” för att kunna hålla reda på alla orden – den typ av fingerräkning Wiggo anser att man måste arbeta bort. Wiggo understryker att man måste skilja mellan ”fingerräkning använd som räkneteknik” – där man aldrig kan sluta att använda fingrarna – och ”fingerräkning som ett medel att nå ett speciellt mål: automatiserad tabellkunskap”. Det är den senare typen av fingerräkning han vill att barnen i Moçambique ska få använda.

I min avhandling har jag gjort en liknande distinktion mellan de två sätten – det ”bra” och det ”dåliga” – att använda fingrarna på. Det ”bra” sättet används inom talområdet 1–10. Fingrarna skapar då en struktur i de 10 ”bastalen”, som gör att man slutar använda dem konkret och föreställer sig dem i stället.

Jag har i min avhandling också beskrivit intervjuer som jag har gjort med äldre elever med matematiksvårigheter. Deras problem var att de ännu på högstadiet och gymnasiet räknade framåt i ”bygga upp”och bakåt i ”ta bort”. De använde fortfarande – och kommer alltid att tvingas använda – ”fingerräkning som räkneteknik” för att kunna hålla reda på de många orden. De hade inte insett att man kan lösa alla typer av subtraktion på det sätt som är enklast: att man t ex kan ta bort två för att lösa uppgiften 2 + _ = 9 och lägga till två för att lösa uppgiften 9 – 7 = _.

En sådan idé skapar barn genom 5-talet i sina fingrar, när de används på det ”bra” sättet. ”Fingerräkning som räkneteknik” utvecklas efter skolstarten, om barn inte före skolstarten har hittat det ”bra” – utvecklingsbara – sättet att använda fingrarna på. I skolan får de knappast något konkret material med ett 5-tal, när de börjar subtrahera inom talområdet 1–10.

5-talet i undervisningen

Enligt japanska räknemetodiker är en förklaring till japanernas överlägsenhet i grundläggande matematik deras användning av talet fem i undervisningen (TILE-metodiken), säger Wiggo, refererande till den japanske forskaren Hatano (1982). Wiggo hänvisar till att en ”fembas” finns inbyggd även i den räkneram – Abacus – som äldre elever och vuxna använder.

Vad Hatano (1982) säger är faktiskt att japanska forskare och lärare har iakttagit att den mellanliggande enheten 5 är *oumbärlig* vid arbetet inom talområdet 1–10 för små barn och för barn med matematiksvårigheter. Det är dessa iakttagelser, säger han, och ingen påverkan från från Abacusens 5-tal, som har gjort att man har rekommenderat TILES för användning i skolorna.

Men Hatano berättar också att varken strategier av typen ”räkna på”, ”räkna bakåt”, eller räknestrategier av något slag rekommenderas, och inte heller tabellträning. Det japanska programmet vilar på barnens manipulationer med TILES, som genom sitt 5-tal gör talen lätta att föreställa sig. Målet är att barnen ska kunna använda TILES i sina tankar.

I boken *Tal och räkning 1* har jag beskrivit TILES som en modernisering av de gamla kinesiska och japanska stavarna.

Femtalet tas sällan upp i svensk undervisning på lågstadiet. För nästan 50 år sedan rekommenderade Fritz Wigforss (1950) att nybörjarna under det första året skulle få använda de romerska siffrorna som är mindre abstrakta än de arabiska, och i Walldorf-pedagogiken har man länge använt dem. Naturligtvis använder inte barnen de romerska siffror vi är vana att se. De får använda de romerska siffror vi ursprungligen formade som avbildningar av våra händer. Fyra skrevs då som IIII och nio som VIIII. Dessa romerska siffror har samma egenskaper som TILES.

Vi använde de romerska siffrorna så i vårt undervisningsexperiment. De blev en mer abstrakt symbol för tal än fingrarna. Men det viktigaste var att de gjorde den första handen till ett ”*odelat 5-tal*”. Kraften i 5-talet beror nämligen på att det är odelat. Femtalet är odelat både i de gamla japanska stavarna, i Abacusen, i TILES och i de romerska siffrorna. Men i den romerska V-symbolen kan man ”binda samman” det högra strecket med de streck som representerar enstaka fingrar, om man t ex vill göra om 5 + 2 till 4 + 3. Man kan lättare ”*transformera*” en talkombination till en annan.

När vi använde de romerska siffrorna kunde barnen inte utgå från 2 och räkna upp orden 3 t o m 9, när de löste uppgifter av typen 2 + _ = 9, eftersom 2 inte går att urskilja i den odelade V-symbolen. Lika litet kunde de räkna 7 steg bakåt från 9, i uppgifter av typen 9 – 7 = 2. Den odelade V-symbolen satte stopp för bakåträknandet när de hade gått 4 steg bakåt.

Alla typer av subtraktion löstes på samma sätt – och mycket enkelt – tack vare ”det odelade 5-talet” i de romerska siffrorna. Talen delades bara upp så att den största delen kom först, strukturerad av 5-talet, som i figuren.

2 + _ = 9 => 9 – 2 = _

VII II

7 + _ = 9 => 9 – 7 = _

Det var just idén om ”det odelade 5-talet” de elever aldrig hade hittat som ansågs ha matematiksvårigheter. Ännu på högstadiet och gymnasiet räknade de framåt på fingrarna i ”bygga upp”och bakåt i ”ta bort”.

Fingrarna använda på ett ”bra” sätt

Förståelsen för att man alltid kan ”välja den bekvämaste vägen” i subtraktion formar barn genom att använda fingrarna på det ”bra” – utvecklingsbara – sättet, när de subtraherar inom talområdet 1–10.

Addition inom detta talområde kan barn klara utan att använda några fingrar, så snart de hittar idén ”räkna på från första”. Antagligen är detta förklaringen till att addition är lättare än subtraktion.

Flertalet nybörjare i min undersökning hade redan hittat det ”bra” sättet att använda fingrarna på.

När eleverna i de två försöksklasserna intervjuades i slutet av årskurs 2 var det ingen som använde sina fingrar längre, och inte heller någon som förklarade sitt omedelbara och korrekta svar med att de hade ”tänkt med sina händer”. Barnen kunde då också lösa uppgifter av typen 82 – 7 = _ och berätta hur de hade tänkt ut svaret. När de hade lärt sig att subtrahera – det vill säga att dela upp talen – inom talområdet 1–10, hade de beredskap att lära sig addera och subtrahera inom högre talområden.

Operationerna där är enbart varianter av operationer inom talområdet 1–10, eller en uppdelning av ett ensiffrigt tal vid 10-talsgränsen.

Wiggo beskriver att det blir några kombinationer kvar att lära sig ”utantill” i ”fembasens lilla additionstabell”, några man inte når med 5-talet: kombinationerna 3+3, 3 + 4, 4 + 3 och 4 + 4.

Många nybörjare kunde även dessa kombinationer, men ingen hade lärt sig dem ”utantill”. En del visste redan vad 3 + 3 och 4 + 4 var. De härledde ofta 3 + 4 och 4+3 från dessa ”dubblor”. Men lika många använde sina fingrar. I problem av typen 3 + _ = 7 utgick de t ex från ”handen plus två”. Sedan förde de – konkret eller i sina tankar – tummen till de två fingrarna och vek in tre fingrar. De ”*transformerade*” en talkombination till en annan.

Kulturell bakgrund?

Lika fascinerad som jag var när jag läste den första delen av Wiggos artikel, lika förvånad blev jag när jag kom till den senare delen. Det mest överraskande var följande uttalande:

”Jag skulle inte kunna tänka mig att föreslå en övergång till fembas med tillhörande fingerräkningsmetodik i länder som Sverige och Portugal. Där finns inte den kulturella bakgrunden. De tankeformer som bygger på fembas blir då artificiella. I Japan där det finns en kulturell bakgrund fungerar däremot fembasen som ett levande instrument i primärskoleundervisningen”

Vad menar Wiggo med kulturell bakgrund? Vetenskapsmannen Dantzig (1930) hävdar i sin bok ”Talen, vetenskapens språk” att det är våra fingrar vi kan tacka för våra väl utvecklade räknefärdigheter. Utan dem skulle taluppfattningen hos människan vara rudimentär, hävdar han.

Det ”strukturerande femtal”, som Wiggo kallar ”fembas”, finns i alla kulturer där decimalsystemet används. Anledningen till att vi har format decimalsystemet är att vi har 5 + 5 fingrar på våra händer.

Vi kan se många exempel på hur 5-talet slår igenom i vår kultur. Vi ser det i vårt myntsystem, i firandet av 25- och 75-årsdagar, i sättet att färga hälften av kulorna röda och hälften blå på kulramar och inte minst i barns sätt att använda sina fingrar.

Forskare – bland annat Piaget (1969) och Werner (1973) – som har kartlagt hur begrepp utvecklas, utgår från tanken att det finns en parallellitet mellan den kulturella och den individuella utvecklingen, och att man kan förstå den ena utvecklingsprocessen genom att studera den andra. Vi kan tex tydligt uppfatta hur de geniala metoder nybörjarna hade börjat forma är desamma som vi en gång måste ha kunnat forma i vår kultur, t ex när vi gjorde de romerska siffrorna till bilder av våra händer, desamma som människor i Moçambique måste kunna forma med hjälp av sina räkneord och desamma som man i Japan kunde forma med hjälp av sina stavar, och senare med hjälp av sin abacus.

Wiggo beskriver i PUMP-projektets rapporter att det är ca 15% av eleverna som ännu inte i årskurs 6 kan addera och subtrahera med hjälp av algoritmer utan växling och minnessiffra. De kan således inte addera och subtrahera inom talområdet 1–10.

Ungefär 15% av eleverna i min undersökning löste knappast något problem korrekt. De hade ännu inte ens hittat idén att man kan använda sina fingrar för att göra en konkret modell av problemet, när man adderar och subtraherar.

Andelen nybörjare som ännu inte hade hittat de kraftfulla idéer barn kan knyta till fingrarna, och andelen äldre elever med matematiksvårigheter, är således lika stor. Som jag tidigare har påpekat får de barn som inte redan före skolstarten har hittat idén med ”det odelade 5-talet” knappast hjälp med att hitta den efter skolstarten. Detta kan vara en avgörande anledning till deras senare problem.

Varför skulle inte svenska elever som ännu inte före skolstarten har hittat idén med ”det odelade 5-talet” och idén ”transformera” få hjälp med att hitta dessa idéer? Och varför skulle tankeformer som bygger på ett ”odelat 5-tal” kännas artificiella för barn som redan själva har format dem, eller som ser sina kamrater forma och använda dem?

Den engelske 1700-talsekonomen Adam Smith har förklarat att räkneorden är ”några av de mest abstrakta termer som människan är i stånd att finna uttryck för” (Struik, 1966). Nog måste vi väl tillåta alla barn, oavsett var i världen de råkar födas, att få använda sitt ”eget språk” – kroppsspråket – till dess de kan översätta det till de abstrakta räkneord som används i det samhälle de har fötts till?

Referenser

Carpenter, T.P. & Moser, M.M. (1982). The Development of Addition and Subtraction Problemsolving Skills. I Carpenter, T.P., m fl. (red). *Addition and Subtraction, a Cognitive Perspective.* Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates.

Dantzig, T. (1930/1954) *Number: The Language of Science*. New York: The Free Press

Fischbein, E., Deri, M., Nello, M.S., & Marino, M.S. (1985). The Role of Implicit Models in Solving Decimal Problems in Multiplication and Division. *Journal for Research in Mathematics Education 16*, 3–17.

Hatano, G. (1982). Learning to Add and Subtract: A Japanese Perspective. I Carpenter, T.P., m fl. (red). *Addition and Subtraction, a Cognitive Perspective*. Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates.

Neuman, D. (1987). *The Origin of Arithmetic Skills. A Phenomenographic Approach*. Acta Universitatis Gothoburgensis. Göteborg.

Neuman, D. (1989). *Räknefärdighetens rötter*. Stockholm, Utbildningsförlaget.

Neuman, D. (1989). Nybörjares uppfattningar av tal och subtraktion. I Emanuelsson, m fl. *Tal och räkning 1*. Lund, Studentlitteratur

Piaget, J. (1969). *The Child's Conception of Number*. London: Routledge & Kegan Paul.

Struik, D.J. (1966). *Matematikens historia*. Stockholm: Prisma. (Först publicerad 1948).

Swetz, F.J. (1990). Numerals from Ancient China. *Nämnaren nr 1, årg. 17,* s 45–48. Stockholm: Utbildningsförlaget.

Werner, H. (1973). *Comparative Psychology of Mental Development*. New York: International universities press. (Först publicerad 1940)

Wigforss, F. (1950). *Den grundläggande matematikundervisningen*. Stockholm: M. Bergvalls Förlag.