

# Matematik på ett andraspråk

Vad krävs det för att lära sig matematik med framgång? Här analyseras några faktorer med inriktning på elever med annat modersmål än svenska. Det handlar inte bara om att svenska är ett annat språk, det kan också vara ett annorlunda språk där skillnaderna kan orsaka svårigheter.

Under de senaste 20 åren har vi båda, såväl var för sig som tillsammans, arbetat med att studera matematikundervisning i mångkulturella miljöer i ett antal olika länder. Vi har också, tillsammans med invandrade lärare, försökt kartlägga vilka förutsättningar som krävs för att en invandrad elev, med framgång, skall lära sig matematik i svensk skola. Dessa erfarenheter håller vi för närvarande på att följa upp och dokumentera i en planerad bokserie, vars första del *Språk, kultur och matematikundervisning* utkom i januari 2008.

När man studerar konsekvenserna av de språkliga och kulturella komplikationer som kan uppstå i skolans matematikundervisning är det två aspekter som är viktiga, nämligen att våga se dem och att inte se dem utgående från sin egen kultur. I annat fall hamnar man lätt i tom retorik av typen: "Se bara till att eleverna lär sig svenska" eller "Det är en tillgång att ha elever från flera olika kulturer i klassen". Vi återkommer till dessa aspekter senare i artikeln.

## Matematik och begrepp

För att kunna tolka språkets och kulturens roll vid matematikinläring måste man förstå vad det innebär att lära matematik. Vi inleder därför med att ge exempel på vad

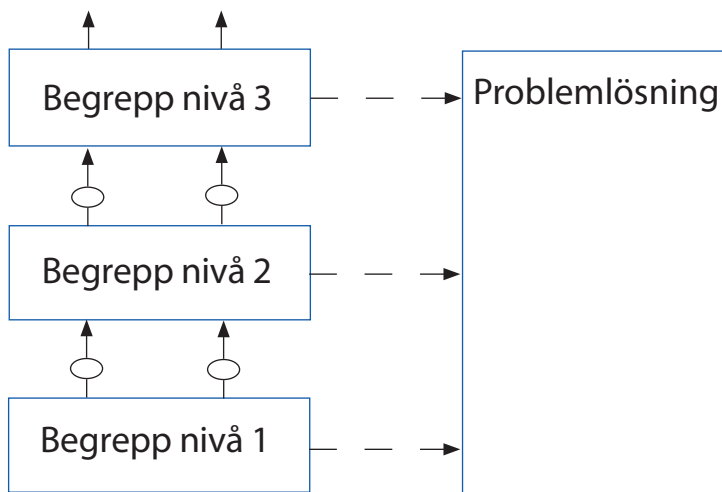
skolans matematikundervisning handlar om. Enligt grundskolans kursplan i matematik syftar undervisningen i matematik "till att utveckla de kunskaper som behövs för såväl fortsatt utbildning som vardagsliv, samhällsliv och studier av andra ämnen" (Lpo94). Detta förutsätter att eleverna under sin skoltid bygger upp och utvecklar en förståelse för ett antal begrepp som med tiden blir allt mer generella och abstrakta. Det är med hjälp av sådana begrepp människan bygger upp de matematiska modeller, om än på olika nivåer, som de sedan använder för att tolka och förstå omvärlden.

En beskrivning av hur en begreppsbyggnad kan gå till återfinns hos Marton och Booth (2000):

*Ur vår synvinkel går lärande i regel framåt från en odifferentierad och mindre sammanhängande förståelse av helheten till en ökad differentiering och integration av helheten och dess beståndsdelar. På så sätt framskriber lärandet inte så mycket från delar till helheter utan från helheter till helheter.*

(s 10)

Med stöd i denna beskrivning kan matematiska problem uppfattas och lösas på olika nivåer, och med olika djup, beroende på vilka begrepp eleven erövrar. Detta är en process som fortgår och förfinas under hela skoltiden och kan illustreras på följande sätt (Löwing & Kilborn, 2008).



För att förklara vad vi menar med figuren, tar vi begreppet subtraktion som exempel. När eleverna kommer till skolan har de redan en mer eller mindre intuitiv uppfattning om subtraktion. I skolan tar man (förhoppningsvis) detta som utgångspunkt när eleverna skall abstrahera subtraktion inom talområdet 0–9, alltså att lära sig behärska olika aspekter av subtraktioner av typen  $7-3$ . Det omfattar bl a insikten om att  $7-3$  är lika med 4 oberoende av vilken kontext subtraktionen är hämtad ifrån. Detta svarar mot begrepps nivå 1 i figuren.

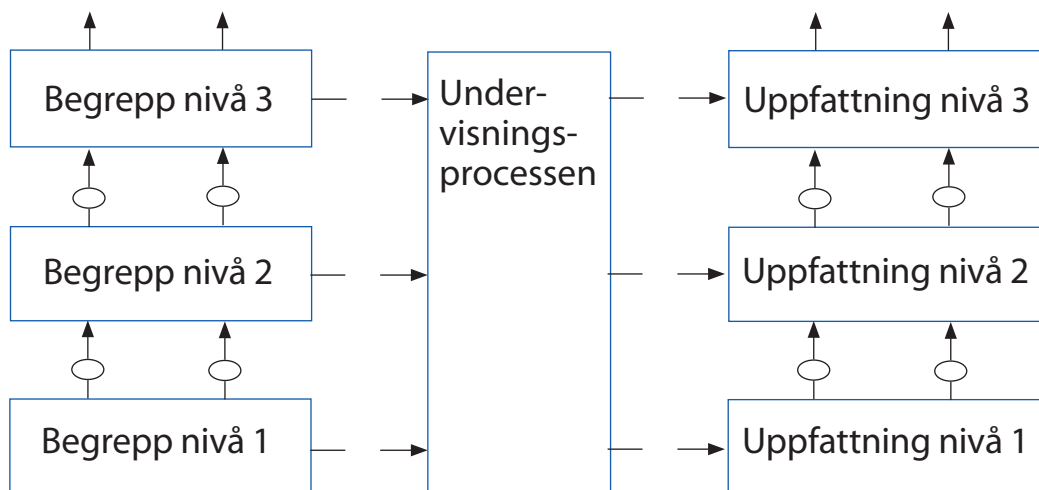
Efter hand utökas subtraktionsbegreppet till att omfatta talområdet 0–19. Detta svarar mot begrepps nivå 2. På motsvarande sätt låter vi subtraktioner inom talområdet 0–100 motsvara begrepps nivå 3. Givetvis är verkligheten betydligt mer komplicerat än så här. Vi har emellertid valt att ge den här förenklade bilden för att kunna kommunicera våra idéer på ett enkelt och förhoppningsvis begripligt sätt.

För att en elev, enligt vår skiss, skall kunna gå från  $7-3$  till  $17-3$  och  $17-13$ , krävs det att eleven har en generaliserbar uppfattning av subtraktion på begrepps nivå 1. Dessutom krävs det ett antal nya förkunskaper för att byta nivå. Det är det senare som markeras med ringar i figuren. Den mest angelägna av dessa nya förkunskaper är att ett tal som 17 är sammansatt av ett tiotal och sju ental. Genom att kombinera detta med begrepp 1, kan en subtraktion som  $17-3$  uppfattas som  $(10+7)-3 = 10+(7-3)$ . Man kan därigenom reducera subtraktionen  $17-3$  till den enklare subtraktionen  $7-3$ . En elev som

uppfattat den här idén, kan lätt generalisera alla subtraktioner från begrepps nivå 1 till begrepps nivå 2.

Som stöd för denna utveckling av begrepp försöker man i svensk skola använda elevernas erfarenheter av omvärlden, lämpliga metaforer eller konkretiserande material. Tanken är att detta skall ge en förståelse som leder till önskad abstraktion. Samtidigt måste man som lärare vara medveten om att vardagserfarenheter, metaforer och konkretiserande material i allmänhet är kulturellt förankrade och inte alltid låter sig överföras mellan kulturer. Till detta kommer att lärare, i alla kulturer, använder helt olika språkbruk när de skall konkretisera ett begrepp än när de formellt beskriver eller tillämpar begreppet ifråga. Varje kultur har också sitt så kallade register, alltså termer och uttryck som är specifika för matematikundervisningen (se Zepp, 1989 och Zevenbergen, 2000). Dessa termer och uttryck kan, inom alla språk, ha helt olika betydelser under en matematiklektion och i vardagsspråket.

Den bild av matematikundervisning vi hittills gett har fokus på läraren. Vi vill nu istället betrakta samma problematik ur elevens synvinkel. Det gäller då att skilja mellan begreppen, som hör hemma i matematiken eller i matematikämnets didaktik och de individuella uppfattningarna av samma begrepp som är knutna till den lärande individen. Den ovan presenterade figuren kommer då att modifieras på följande sätt, sett ur en speciell individs perspektiv.



Figuren skall tolkas så här. Lärarens mål för den aktuella undervisningen är att hjälpa eleverna att utvidga ett visst begrepp från nivå 1 och vidare till nivå 2 och nivå 3. Detta innehåll erbjuds eleverna genom undervisningsprocessen. Läraren skall därvid synliggöra den matematik som eleven förväntas lära. Vad eleven uppfattar av den kommunikation som då sker, är helt beroende av vilken uppfattning eleven ifråga har på nivå 1 och om eleven kan tillgodogöra sig de nya förkunskaper som krävs för att ta steget från nivå 1 till nivå 2. Mot detta kan man invända att det oftast finns flera vägar att nå ett visst mål. Det är givetvis så, men samtidigt måste man vara medveten om att varje sådan alternativ väg kräver sina speciella förkunskaper och att dessa förkunskaper inte kan blandas hur som helst. Det räcker med en enda missuppfattning för att eleven skall få en felaktig uppfattning och därmed missa målet.

## Om begrepp och uppfattningar

Under ett stort antal år har vi med diagnoser, intervjuer och klassrumsobservationer studerat och analyserat hur olika elever lyckats utveckla grundläggande matematiska begrepp (se tex Löwing & Kilborn, 2002). Ett resultat av de didaktiska analyser vi därvid gjort är, att 13% av det tusental svenska elever vi hittills undersökt i årskurs 4, ännu inte behärskar uppgifter av typen  $7 - 3$ . För

att göra en jämförelse med läsinlärning, kan man säga att dessa elever inte kan räkna med flyt. Konsekvenserna av detta ser man klart när samma elever får uppgifter av typen  $17 - 3$  eller  $17 - 13$  utan tiotalsovergång. För att följa upp parallellen med läsinlärning gäller det nu att sätta samman två "morfem", alltså  $7 - 3$  och  $17 = 10 + 7$ , och att tolka resultatet som  $10 + (7 - 3)$ . Andelen elever i årskurs 4 som inte behärskar den här operationen är 24%. När vi därefter studerar vad som händer på begreppsnivå 3, alltså när eleverna skall utföra operationer av typen  $47 - 4$  och  $47 - 43$  (fortfarande utan tiotalsovergångar), så har antalet elever i årskurs 4 som gör systematiska fel, vuxit till 42%.

Om man bara ser till begreppen som sådana, så verkar det inte vara speciellt svårt för en elev att efter drygt tre år i skolan kunna beräkna  $47 - 3$  som  $40 + (7 - 3) = 40 + 4$ . Detta förutsätter emellertid att eleverna har uppfattat de grundläggande begreppen på ett generaliserbart sätt. Den idé som skall abstraheras är enkel: Om man har fyra tior och sju enkronor och skall köpa något som kostar 3 kr, så betalar man med enkronorna och får fyra enkronor över. Samtidigt har man fortfarande kvar de fyra tiorna.

För elever som uppfattar skolans matematik som att det bara gäller att räkna föremål eller fingrar, fungerar en sådan uppfattning av subtraktionen tillfälligt i årskurs 1, inom ett begränsat talområde. I årskurs 2 där de möter uppgifter som  $17 - 3$  och  $17 - 13$  eller

47-3 och 47-43, blir det betydligt mer komplicerat att använda sig av föremål eller att räkna på fingrarna. De som då inte har abstraherat subtraktionens idé, får därför successivt allt större problem. Om det dessutom förekommer tiotalsövergångar i subtraktionen, stiger antalet elever med otillfredsställande strategier till drygt 60% i årskurs 4.

Vad detta visar är att många av de lärare som undervisar i matematik under de första skolåren, inte har tagit reda på om eleverna har uppfattat de grundläggande subtraktionsbegreppen på ett utvecklingsbart sätt. Det räcker inte med att eleverna i årskurs 2, efter lång betänketid eller med hjälp av fingrarna, kan få rätt svar på en viss typ av uppgift. Det gäller också att se till att eleverna har flyt i sitt räknande. I annat fall växer bara problemen med tiden.

De data som just presenterats gäller för elever vars föräldrar i allmänhet har svenska som modersmål. Vi skall nu övergå till att analysera vad detta innebär för de invandrade elever som studerar matematik på ett andraspråk som ännu är ett interimsspråk, alltså ett språk som ännu ej är färdigutvecklat.

## Språk kultur och begrepp

Mot bakgrund av vad vi hittills beskrivit blir det intressanta att studera vad som händer när en invandrad elev, som gått i skolan under ett eller ett par år i ett annat land, kommer till en svensk skola. En elev som kommer från tex Kina eller något arabisktalande land, måste i ett första steg lära sig våra bokstäver och siffror. Det tar tid. Enligt Hyltenstam (1993) och Hyltenstam och Toumela (1996) tar det dessutom många år innan en invandrare kan bygga upp begrepp på ett andraspråk. Vad händer under den tiden? Jo, under tiden går, som Wellros (1993, 1998) uttrycker det, elevens intellekt på högvarv under lektionerna. Eftersom eleven av det skälet inte hinner med att hantera all den information som ges på svenska, går stora delar av undervisningen förlorad. Detta påverkar givetvis elevernas möjligheter att uppfatta de begrepp som presenterats, på ett korrekt sätt. För att inte hindra elevens matematiska utveckling krävs det därför till en början en matematikundervisning på

elevens modersmål. En avgörande fråga blir därför vem på skolan som tar ansvar för att det verkligen sker en matematisk begreppsutveckling på modersmålet under tiden och vem som avgör när eleven är mogen att börja lära sig matematik på svenska. En lika viktig fråga är vilka kriterier som används för att fatta sådana beslut.

För elever som kommer från ett land där man har mer logiskt uppbyggda räkneord än de svenska, kan förvirringen bli stor när de här i Sverige skall gå från begrepps nivå 1 till begrepps nivå 2. För elever som kommer från tex Vietnam eller ett land med ett slaviskt språk heter talen efter 10: tio-ett, tio-två, tio-tre etc. Man läser alltså talen på samma sätt som man skriver dem med siffror. Att 17 betyder  $10 + 7$  har alltså stöd i språket. I Sverige inleds talen efter 10 med elva och tolv, som inte är tolkbara för dem som inte känner till kopplingen till gotiska eller fornnordiska. Efter detta följer talen tretton, fjorton, femton etc där man nämner entalet före tiotallet och där tio plötsligt heter "ton", en annan oregelbundenhet i den svenska talraden.

Om en elev kommer från Tyskland uppstår andra komplikationer. Där heter talen 13, 14, 15 ... tre-tio, fyra-tio, fem-tio. Med deras logik skulle de svenska talen trettio, fyrtio och femtio logiskt sett betyda 13, 14 och 15! På arabiska, där talraden är uppbyggd som på tyska, tillkommer problemet med läsriktningen. Man skriver text och enstaka ord från höger till vänster, men skriver tal från vänster till höger. Detta innebär att en subtraktion som  $14 - 9$  skrivs  $9 - 14$  (fast med arabiska siffror). På båda språken behandlas talen mellan 20 och 100 på motsvarande sätt. Som exempel läser man talet 42 som två och fyrtio och dessutom 342 som trehundra två och fyrtio.

För en elev som kommer från Somalia blir det en annan konflikt mellan deras och våra räkneord. I Somalia kan tolv heta både tio och två och två och tio liksom trettio-två kan heta både trettio och två och två och trettio. Mot denna bakgrund kan man fråga sig hur en somalier tolkar de svenska räkneorden tretton och trettio.

Elever som har ett romanskt språk som modersmål möter ett annat problem. På spanska och portugisiska är talen 11-15 något konfunderande om man inte känner till deras ursprung från latinet, alltså

undecim (ett-tio), duodecim (två-tio) etc. Här nämns alltså entalet före tio. När man på dessa språk kommer till talen 16, 17 etc byter man emellertid strategi och på spanska heter nu sexton dieciséis (tio och sex), sjutton diecisiete (tio och sju) etc. I det här fallet är transfererbarheten mellan språken låg. Franskans användning av tjugotal såsom quatre-vingt-dix-neuf för 99 gör inte övergången till svenska lättare.

De språkliga inkonsekvenser och de skillaktigheter som gäller för talens namn vållar sannolikt inte några större problem för en elev som lärt dem på sitt modersmål och som fortsätter att bygga upp begrepp på detta modersmål. Problemet uppstår när man tvingas byta undervisningsspråk och det förväntas att man skall övergå till att kommunicera och bygga upp begrepp på ett andraspråk. Det är därför angeläget att man som lärare är medveten om, och att man synliggör, den här typen av kulturella konflikter för invandrade elever och därmed underlättar övergången till den svenska talraden. I annat fall kan en negativ transfer leda till allvarliga missuppfattningar.

För att konkretisera den här processen återvänder vi till den senaste figuren och antar att en elev har arbetat med begreppet subtraktion inom talområdet 0–9 på ett modersmål, vars räkneord byggs upp på ett annat sätt än på svenska. När eleven skall generalisera sin uppfattning till begreppsnivå 2, så presenteras de nya talen 11–19 på ett språk där talens namn har en helt annan struktur än på modersmålet. Samtidigt skall kanske eleven generalisera operationer som 5–3 till 15–3 på ett språk där 15 inte heter 10+5. Detta förväntas den invandrade eleven hantera, samtidigt som intellektet redan går på högvarv för att eleven skall hinna med att följa kommunikationen i stort.

Det är inte bara språket som påverkar den invandrade elevens inläring. Ofta skiljer sig hela undervisningssituationen från vad eleven är van vid från tidigare. Det gäller därför för den invandrade eleven att få syn på och att uppfatta de sociala regler som gäller i svensk skola. De flesta elever som invandrat till Sverige kommer från en skolkultur med en *stark inramning*, alltså en kultur med fasta och uttalade regler (se Bernstein, 1983). Här i Sverige möter eleven istället en skola med svag inramning, alltså med vaga

(ofta tysta) regler. Detta gör inte inläringssituationen enklare. Vem hjälper elever att få syn på dessa regler om vad som förväntas av dem? En målande beskrivning av sådana dilemman ges av Cederberg (2006).

## Vad kan matematikläraren göra?

I den här artikeln har vi utgått från ett relativt enkelt exempel. När man kommer till områden som geometri, statistik, bråkräkning, procent etc, blir det betydligt mer komplicerat. Man kan emellertid redan utgående från vårt enkla exempel konstatera att retoriken: "Se bara till att eleverna lär sig svenska" inte håller. Språket är bara bärare av begrepp och kultur och det är de kulturella skillnaderna som är avgörande. Det är denna problematik som måste hanteras på ett insiktsfullt sätt och i samverkan mellan läraren i förberedelseklassen, modersmålsläraren, läraren i svenska som andraspråk och av den lärare som senare kommer att undervisa eleven i matematik. Någon av dessa lärare måste i ett första steg avgöra vilka begrepp eleven behärskar på modersmålet. Någon måste också ta ansvaret för att avgöra när elevens svenska är så väl utvecklad att eleven kan lära matematik och bygga upp nya begrepp på andraspråket svenska.

Processen att bygga upp matematiska begrepp på ett annat språk än modersmålet är, som Hyltenstam och Tomela (1996) beskriver det, relativt komplicerat. Det krävs därför en hel del kunskaper och insikter från deras lärares sida, för att kunna möta respektive elevs behov. För att hantera detta bör läraren vara väl insatt i hur matematikundervisningens innehåll, mål och metoder ser ut i de kulturer eleverna kommer ifrån. Det räcker därför med att ha två, tre elever med olika kulturell bakgrund i klassen, för att arbetssituationen skall bli nog så komplicerat. Av det skälet har vi svårt att förstå varför det skulle vara "en tillgång att ha elever från många olika kulturer i klassrummet". Det må gälla om man skall undervisa i språk eller samhällskunskap, men det gäller sällan då man undervisar i matematik. Vad som däremot är en resurs är att ha en lärare i matematik som talar ens modersmål!

Av de lärare som ansvarar för den invandrade elevens undervisning är det bara

klassläraren eller läraren i matematik som vet vilka begrepp som kommer att behandlas i matematikundervisningen under den närmaste tiden. Denna lärare bör därför ha ansvaret för att utreda elevens aktuella förkunskaper om och uppfattningar av viktiga begrepp. Som en del av denna utredning bör man ta reda på vilka begrepp eleven redan har utvecklat på modersmålet. Sådana begrepp brukar kunna överföras till ett andraspråk när detta är tillräckligt väl utvecklat. När det gäller begrepp som ännu inte är färdigutvecklade på modersmålet är det enligt Hyltenstam och Toumela (1996) meningslöst att, innan andraspråket är tillräckligt utvecklat, ge en kompletterande undervisning på svenska. Eleven bör istället ges möjligheter att fortsätta sin kunskapsutveckling på modersmålet.

Under den tid en nyss invandrad elev får hjälp med att komplettera och utveckla matematiska begrepp på modersmålet sker en undervisning i svenska som andraspråk. Det är angeläget att läraren i matematik engagerar sig även i denna undervisning. Ofta är undervisningen i svenska enbart inriktad mot att kommunicera vardagsbegrepp. Det betyder att eleven inte lär sig det språk som används under matematiklektioner. För att möjliggöra för den invandrade eleven att på sikt tillgodogöra sig en undervisning på svenska bör läraren i matematik bidra med att lyfta fram de ord och uttryck som används under en matematiklektion. En enkel åtgärd är att ta reda på vilka ord och uttryck som används i det aktuella läromedlet.

Vad vi för närvarande arbetar med är att beskriva hur ett antal grundläggande matematiska begrepp uttrycks och hanteras på olika språk och i olika kulturer. Avsikten är att detta skall leda till såväl funktionella instrument för att kartlägga invandrade elevers förkunskaper, som att ge klarare insikter om vilka kulturella och språkliga konflikter som brukar uppstå för elever som kommer från olika kulturer. Arbetet omfattar för närvarande ca 30 olika språk/kulturer. Hör gärna av dig till wiggok@compaqnet.se om du vill att just din kultur skall finnas med.

## LITTERATUR

- Bernstein, B. (1983). *Makt, kontroll och pedagogik: studier av den kulturella reproduktionen*. Stockholm: Liber Förlag.
- Cederberg, M. (2006). *Utifrån sett – Inifrån upplevt*. (Malmö Studies in Educational Sciences. No 22). Malmö: Lärarutbildningen Malmö högskola.
- Hyltenstam, K. (1993). Att återerövra sin mänsklighet. I K-O. Arnstberg (red) *Kultur, kultur och kultur - perspektiv på kulturmöten i Sverige*. Stockholm: Liber Utbildning.
- Hyltenstam, K. & Toumela, V. (1996). Hemspråksundervisningen. I K. Hyltenstam (red) *Tvåspråkighet med förhinder? Invandrar- och minoritetsundervisning i Sverige*. Lund: Studentlitteratur.
- Löwing, M. & Kilborn, W. (2002). *Baskunskaper i matematik*. Lund: Studentlitteratur.
- Löwing, M. & Kilborn, W. (2008). *Språk, kultur och matematikundervisning*. Lund: Studentlitteratur.
- Marton, F. & Booth, S. (2000). *Om lärande*. Lund: Studentlitteratur.
- Wellros, S. (1993). *Kulturmöten till vardags. Om kommunikation över kulturgränser*. Stockholm: Liber utbildning.
- Wellros, S. (1998). *Språk, kultur och social identitet*. Lund: Studentlitteratur.
- Zepp, R. (1989). *Language and Mathematics Education*. Hong Kong: API Press.
- Zevenbergen, R. (2000). "Cracking the Code" of Mathematics Class-room: School Success As a Function of Linguistic, Social and Cultural Background. I J. Boaler (red) *Multiple Perspectives on Mathematics Teaching and Learning* (201 – 223). Westport CT: Ablex Publishing.