Förskolebarns algebraiska tänkande

Frances Curcio & Sydney Schwartz

Genom konkret arbete med olika materiel utvecklas barnens tänkande kring matematiska idéer. Artikeln beskriver hur några förskolebarn samtalar kring ett par aktiviteter. Samtalen avslöjar tidigt algebraiskt tänkande.

Under de senaste decennierna har vi kommit att acceptera tanken att början till matematiskt tänkande och räkning uppstår långt innan barnen börjar förskolan, och att förståelse och färdigheter snabbt utvecklas när barnen kommer till förskolans verksamhetsbaserade inlärningsmiljö. Litteraturen är rik på beskrivningar av förskolebarns erfarenheter av att upptäcka mönster och matematiska relationer när de arbetar med olika sorters materiel. (Bredekamp, 1987; Hartley, Frank, and Goldenson, 1952; Payne, 1990). Om barnen i skolan får tillgång till ett rikt utbud av varierat materiel för konstruktion, representation, kreativa uttrycksformer, experiment och upptäckter av relationer vet vi att de ständigt engagerar sig i tal, geometri och mätning. Lärande om tal kan exempelvis komma till stånd när barnen:

sorterar och grupperar föremål, t ex sorterar pinnar efter färg

räknar föremålen, och räknar igen, t ex räknar fem röda pinnar och fyra blå

jämför storleken av grupper, t ex finner fler röda än blå pinnar

ändrar gruppers storlek, ibland genom att eftersträva likhet, tar bort en röd pinne för att få fyra röda och fyra blå.

Frances Curcio *är associate professor of mathematics education vid New York University.*
Sydney Schwartz *är professor of early childhood education och rektor för lärarutbildningen vid Queens College of the City University of New York.*

När barnen bygger med klotsar sker inlärning av geometri och mätning. Vi ser hur de experimenterar med:

symmetri, t ex placerar två cylindrar på var sin sida av ett bygge

jämvikt, bygger konstruktioner som inte faller omkull

vikt, plockar ut lättare föremål att ha överst på bygget

ekvivalens hos längder, de lägger fyra mätklotsar för att få samma längd som en lång.

NO-experiment ger rika möjligheter till att göra förutsägelser om sådana förändringar hos materialet som rör form och storlek. Barn uppskattar hur länge det kommer att dröja innan förändringarna märks och i vilken ordning dessa kommer att ske.

Förskollärare har blivit medvetna om att dessa upplevelser har att göra med tal, geometri och mätning. Vi har sedan en tid sökt efter tecken på begynnande algebraiskt tänkande. Vår fråga har varit ”Hur kommer algebraiskt tänkande till uttryck hos förskolebarn?”

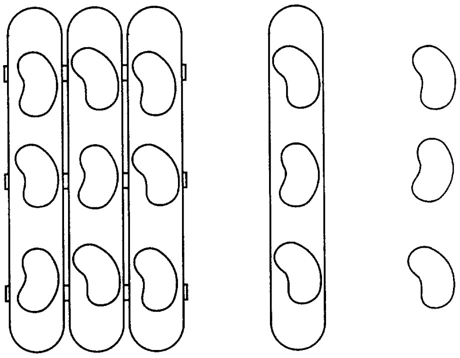
Enligt New World Dictionary (1980), definieras algebra som *”a mathematical system used to generalize certain arithmetical operations by permitting letters or other symbols to stand for numbers.”*

Som matematiklärare i förskolan måste vi emellertid frigöra oss från vuxnas uppfattning att algebra betyder att lösa ekvationer med hjälp av *x* och *y*. Inriktar vi oss på nyckelordet i definitionen, nämligen generalisering, kan vi se vad som skulle kunna vara beståndsdelar i ett begynnande algebraiskt tänkande. Generalisering växer fram ur ett igenkännande av mönster och relationer och en analys av dessa förhållanden, varav många berör begrepp som har att göra med multiplikation och proportionalitet. Dessutom, om användningen av symboler för att generalisera är en väsentlig del av algebraiskt tänkande, så stödjer arbetet med olika materiel barnens växande förmåga att använda abstrakta symboler.

I vårt sökande efter svar på frågan om tidigt algebraiskt tänkande studerade vi några observationer av barn som använder olika materiel för att skapa, utvidga och generalisera mönster och för att behandla proportionella förhållanden, något vi anser vara nödvändiga ingredienser för att utveckla algebraiskt tänkande. Dessutom lät vi en förskoleklass pröva på nya aktiviteter. I dessa avslöjas något som vi har identifierat som tecken på begynnande algebraiskt tänkande.

En utmanande aktivitet

Vi ställde i ordning materiel för att växla tre-mot-en, en aktivitet för att utmana tänkande kring mönster och proportionella samband. Materialet bestod av bönor, stickor med tre bönor påklistrade och flottar gjorda av tre bönstickor.



Flotte *Sticka* *Bönor*

Spelet går ut på att samla bönor genom tärningskast. När barnen fått ihop tre bönor, växlar de dem mot en bönsticka. När barnen fått ihop tre bönstickor, växlar de dem mot en flotte. Spelet är slut när båda spelarna fått en flotte. Materialet var nytt för barnen i klassen. En av oss fungerade som lärare och arbetade tillsammans med Ilya och Jackie, två förskolebarn. Aktiviteten genomfördes i slutet av skolåret och dessa barn skulle snart börja första klass.

De la genast märke till vissa egenskaper hos tal. Jackie började räkna på flottarna, ”ett, två, tre, fyra, fem, sex, sju, åtta, nio,” och sa, ”Åh, det finns nio bönor på en flotte” Ilya räknade bönorna på en flotte och fortsatte därefter uppräkningen med bönorna på stickorna, som var uppradade på bordet. Han såg alla bönor som en odelad mängd.

Beskrivningen av barnens engagemang i aktiviteten låter oss ana en progression i matematiskt tänkande och avslöjar definitivt ett begynnande algebraiskt tänkande. Vi kan se nyckelelement i tidigt algebraiskt tänkande när barnen efter hand avslöjar dem: de använder mönster och talrelationer och de känner igen proportionella förhållanden och byte av talenhet.

Mönster och talsamband

Eftersom aktiviteten med bönstickor var ny för barnen, var starten lite trevande. Efter tre eller fyra omgångar började de visa sin förmåga att hantera växlingen. Ilya hade en bönsticka och två bönor. När tärningen visade att han skulle få fyra bönor till, förklarade han: ”Jag kommer att ta en flotte.” Han hoppade över den mellanliggande växlingen tre bönor mot en sticka. I stället bytte han en sticka, två bönor och de fyra outtagna bönorna mot en flotte.

När Ilya fick möjlighet att bestämma hur många flottar som skulle vara spelets mål, föreslog han att de skulle försöka få fem flottar. Läraren undrade: ”Har vi så att det räcker till fem flottar?” Med alla femton bönstickor och två flottar uppradade på bordet, började Ilya omedelbart räkna stickorna i grupper om tre utan att fysiskt gruppera dem eller flytta dem från sin plats i raden. I huvudet höll han ordning på hur många grupper om tre bönstickor han räknade. Efter att ha räknat fem grupper om tre stickor, sa han att det fanns tillräckligt för fem flottar. Jackie följde Ilyas lösning, men tog i stället stickorna och grupperade dem fysiskt i mängder om tre, och bekräftade Ilyas påstående att det fanns tillräckligt med stickor till fem flottar. Det mönster de både såg och använde för att lösa problemet med de fem flottarna var detsamma som vid grupperingen av tre bönstickor. Detta mönster visar strukturen fem grupper med tre i varje, alltså 3 + 3 + 3 + 3 + 3, eller 5 x 3. Båda barnen hade lätt att visualisera en grupp med tre bönstickor som en flotte, även om de inte rent fysiskt var ordnade så.

Att känna igen proportionella samband och byte av talenhet

Barnens tidigaste erfarenheter som ligger till grund för proportionellt tänkande och byte av talenhet hör samman med deras kropp. Barn relaterar exempelvis fem fingrar till en hand, tio fingrar till två händer. Utan att man använder symbolisk notation kan multiplikativa relationer, förhållandet 5:1, utvidgas till proportionalitet, fem fingrar förhåller sig till en hand på samma sätt som tio fingrar till två händer, dvs, 5:1 som 10:2, eller fem fingrar förhåller sig till en hand som 20 fingrar till fyra händer, dvs 5:1 som 20:4, och så vidare. Om man associerar denna relation med vantar och handskar, kan barnen tänka på en hand inuti en vante eller fem fingrar inuti en handske. På denna konkreta nivå blir barnen intuitivt medvetna om begreppet talenhet (Ellison, 1972) – att en hand kan vara både ett, dvs en hand, och fem, dvs fem fingrar, på samma gång. Utmaningen för skolan är att lyfta denna intuitiva känsla till en medveten nivå.

Efter att ha spelat åtskilliga omgångar med växlingsspelet samtalade läraren med barnen kring några observationer i ett försök att nå deras uppfattning om hur en bönsticka både kan representera ”ett” och ”tre” på samma gång, och hur både en böna och en bönsticka kunde representera en *enhet*.

Samtalet mellan läraren (L), Ilya (I), och Jackie (J).

L: Jag undrar om du tänkte på vad som var lika och vad som var olika hos dessa. (Lägger ut tre bönor och en sticka.) Jag såg till exempel att du räknade tre bönor och sen växlade tre bönor mot en sticka. Är dessa (pekar på de tre bönorna och stickan) lika eller olika?

J: De här är tre (pekar på bönorna) och de här är tre (pekar på stickan).

L: Håller du med om det? (I nickar ja.)

L: Och om jag skulle säga att du har en böna och en sticka (pekar och visar på en böna och en bönsticka). Är det lika eller olika?

I: Lika

L: Varför är det lika?

I: Det är en sticka och en böna. Och det är lika för att ett och ett är lika.

L: (Till Jackie.) Vad säger du om det?

J: Jag tycker inte att det är lika.

L: Vad tycker du?

J: Den här är ett (pekar på bönan) och det här är tre (pekar på stickan).

I: (Förtydligar för Jackie.) Stickan, stickan, stickan är en.

L: (Håller upp bönstickan) Så, vad är det här, ett eller tre?

I: Ja, om man tar stickan utan bönorna, så är det ett …

L: Låt oss tänka på något annat nu. Jag såg att ni tog tre bönstickor förut och att ni grupperade dem tre och tre. Nu undrar jag om ni tycker att tre stickor (pekar på de tre stickorna som är upplagda på bordet) och den här flotten (pekar på en flotte vid sidan av de tre bönstickorna) är lika eller olika?

J: De är lika.

L: Hur då?

J: Tre, tre, tre (pekar på bönstickorna) och tre, tre, tre (pekar på stickorna på flotten) …

L: (Till llya) Och vad tycker du?

I: Lika

L: Hm. Men, det här är tre (pekar på tre stickor) och det här är en (pekar på flotten). Hur kan det vara så?

I: Om du tar dem här så här (för ihop tre stickor till en flotte), så är det lika.

När Jackie å ena sidan ombads jämföra tre bönor med en sticka, svarade hon snabbt, och relaterade till *egenskapen tre* i varje helhet som varande densamma. Senare, när hon jämförde tre bönstickor med en flotte ger hennes svar stöd för en liknande observation. I båda fallen håller llya med henne. Båda barnen uppvisar en förmåga att se till den uttryckta, identiska representationen av egenskapen tre i materielet.

När Jackie å andra sidan fick frågan om huruvuda en böna och en bönsticka är samma eller olika, satt Jackie tyst när Ilya svarade att de var samma, eller ekvivalenta. Ilya fokuserade på det som kännetecknade *egenskapen ett* hos enheten i båda fallen. Ibland kan stickan representera ett, en grupp om tre, och ibland kan stickan representera tre.

Att Ilya kan byta fokus från ett till tre och från tre till ett visar flexibilitet i tänkandet och att hans uppfattningar om byte av talenhet utvecklas.

När Jackie inte håller med försöker Ilya rikta hennes fokus mot enheten eller stickan. Fastän detta bara är ett exempel från deras samtal, visar det tydligt en skillnad i förmåga hos dessa två barn när det gäller att behandla byte av talenhet. Lärare behöver sådan information som hjälp i samspelet med barnen och för att planera aktiviteter som behandlar proportionella samband och byte av talenhet. Vi fann att den här aktiviteten var ett sätt att nå barnens tänkande kring detta. En annan möjlighet att diskutera dessa idéer gav aktiviteten med vägning.

En aktivitet med vägning

Redan i förskolan kan barn börja formalisera förhållandet mellan och inom mängder som de känner igen, både i planerade och oplanerade sammanhang. I slutet av förskoleåret vägde Rachel föremål med en balansvåg i NO-hörnan. Hon tog en uppsättning ”räknebjörnar”, björnmammor och björnungar. Rachel placerade en björnmamma på vågen som då tippade över. Hon tog en björnunge och placerade den i andra vågskålen men det vägde inte jämnt. Då satte hon en unge till i samma skål. Vi utnyttjade detta uppenbara tillfälle och diskuterade med Rachel. På samma sätt som i växlingsaktiviteten kunde vi se nyckelelement i tidigt algebraiskt tänkande avslöjas i samtalet med Rachel: mönster och talrelationer och förmåga att känna igen proportionella samband.

Läraren (L), och Rachel (R), diskuterar vid vågen

L: Så, vad händer?

R: Två björnungar väger jämnt med björnmamman.

L: Vad tror du kommer att hända om du sätter en mamma till i vågskålen?

R: Den kommer att tippa.

L: Varför inte pröva och se?

R: (Placerar en till björnmamma på vågen och nickar för att bekräfta sin förutsägelse)

L: Hur kan vi få vågen att väga jämnt nu?

R: (Efter att ha placerat ytterligare en unge tillsammans med de andra två i skålen) Å, nej. Jag behöver en till (placerar en björnunge till på björnungeskålen så att det blir fyra. Det väger jämnt).

L: Har du funderat på att börja med ungar istället för med mammor?

R: Jag tror inte att det skulle fungera.

L: Varför inte?

R: Man kan inte sätta dit en unge och sen en mamma och få det jämnt. Så jag börjar med björnmammorna..

L: Hur skulle du göra för att väga jämnt med tre björnmammor?

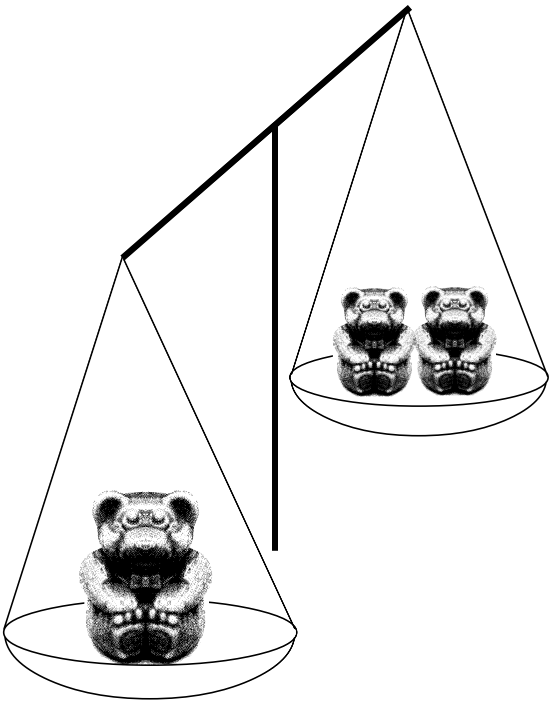
R: Jag vet att jag behöver mer än fyra björnungar.

L: Hur vet du det?

R: Till två björnmammor behövde jag fyra ungar, och nu har jag tre mammor. (När hon lägger till en unge så att de blir fem väger det inte jämnt.) Åh, nu vet jag. Jag fortsätter med två – Jag behöver två ungar till, det blir sex.

L: Finns det något sätt som du skulle kunna visa vad du har kommit på, för att kunna berätta det för klassen?

R: 1-2, 2-4. 3-6 (skriver på ett papper).



Att känna igen proportionella samband

När Rachel fick frågan vad hon skulle göra för att få björnungar att väga jämnt med tre björnmammor, svarade hon att hon visste att hon behövde mer än fyra ungar eftersom ”Till två björnmammor behövde jag fyra ungar, och nu har jag tre mammor.” Relationen två-till-ett blev inte uppenbar för henne förän hon försökte balansera tre mammor med fem ungar. Då insåg hon att hon skulle fortsätta med två. Efter att ha skrivit ner förhållandet 1:2, fortsatte hon att väga björnmammor och björnungar upp till fem mammmor och tio ungar. Varje gång placerade hon två ungar i björnungeskålen för varje mamma i björnmammeskålen.

Att använda mönster och talrelationer

Genom att känna igen mönstret att det för varje björnmamma krävdes två björnungar för att vågen skulle väga jämnt, började Rachel utveckla en regel för att generalisera förhållandet mellan vikten hos björnmamman och vikten hos björungen. I formella termer var hennes regel ”Antalet björnungar är dubbelt så stort som antalet björnmammor”. Det betyder att det behövs två björnungar för att balansera varje björnmamma på vågen. Hur språket används är kritiskt. Senare kommer eleverna att översätta sådana förhållanden till symboler (tex $b = 2m$, där m står för antalet björnmammor och b står för antalet björnungar). Sådana översättningar har dokumenterats som oklara även för tekniska studenter (Clement 1982). Kanske kan man genom att redan vid tidig ålder börja diskutera sådana relationer motverka missuppfattningar som är vanliga vid användning av symboler under senare år. I det här fallet är betoningen på antal viktigt därför att om istället b och m stod för vikten på björnmamman och ungen, skulle relationen bli den omvända, och $m = 2b$ hade på ett korrekt sätt beskrivit situationen.

Avslutande kommentarer

Även om vi i vår diskussion har fokuserat på generalisering från undersökningar av talmönster, proportionella samband och byte av talenhet, finns det andra viktiga aspekter av algebraiskt tänkande som kan märkas i barnens svar på några av frågorna. Exempelvis att barnens förmåga att känna igen skillnaden mellan identisk och ekvivalent representation av matematiska förhållanden utvecklas efter hand. Jackie fokuserade huvudsakligen på det identiska hos tre lösa bönor och tre bönor på en pinne, medan Ilya fokuserade på det ekvivalenta hos en böna och en pinne. Rachel fokuserade också på ekvivalensen genom att se en björnmamma och två björnungar som lika. Vi har heller inte uttryckligen diskuterat funktion, som är ett centralt begrepp i matematik, i vår beskrivning av Rachel. Men faktiskt är en underliggande funktion (dvs, antalet björnungar är en funktion av antalet björnmammor) tydlig när hon formulerar sin regel. En utmaning för oss är att undersöka dessa idéer ytterligare.

I våra samtal med förskolebarn avslöjas en värld av prealgebraisk förståelse och förklaringar som aldrig skulle ha avslöjats om vi inte hade sökt efter dem på det här sättet. Barnen löste inte ekvationer eller representerade okända tal med symboler. Det är vad de säger och gör som visar hur begynnande algebraiskt tänkande skulle kunna komma till uttryck i förskolan.

Genom undersökande aktiviteter med konkret material uppmuntrar förskollärare barnen att känna igen mönster och att göra förutsägelser. En utmaning är att söka efter sätt att få barnen att engagera sig i och resonera kring proportionella samband. För att kunna planera för att stimulera det tidiga algebraiska tänkandet behöver vi många exempel på aktiviteter som stödjer sådant prealgebraiskt tänkande som vi har beskrivit. Tecken på barns begynnande algebraiska tänkande kan vara till hjälp när vi fattar beslut om undervisningen. Vi inbjuder lärare att tillsammans med oss söka efter fler exempel på förskolebarns begynnande algebraiska tänkande.

Referenser

Bredekamp, S. (Ed). (1987). *Developmentally Appropriate Practice in Early Childhood Programs Serving Children from Birth through Age 8*. Washington, D.C.: National Association for the Education of Young Children.

Clement, J. (1982). Algebra Word Problem Solutions: Thought Processes Underlying a Common Misconception. *Journal for Research in Mathematics Education 13* (januari): 16-30.

Ellison, A. (1972). The Concept of the Shifting Unit. *Arithmetic Teacher 19* (mars): 171-76.

Hartley, R. E., Lawrence K. F. & Goldenson, R. M. (1957). *Understanding Children's Play*. New York: Columbia university Press.

New World Dictionary of American Language. 2d College Ed. (1980). New York: Simon & Schuster.

Payne, J. N. (Ed). (1990). *Mathematics for the Young Child*. Reston. Va.: National Council of Teachers of Mathematics.

Artikeln har varit publicerad i *Teaching Children Mathematics*, februari 1997, och publiceras här med tillåtelse från NCTM. Översättning Redaktionen