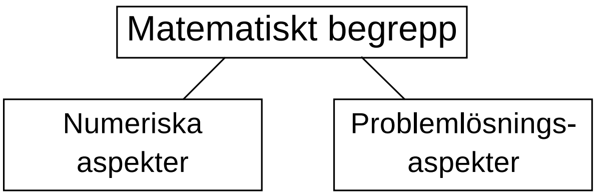
Aktiviteter för att lära matematik

Bjørnar Alseth

I det norska KIM-projektet kartläggs elevers begrepp och uppfattningar inom olika områden. Här presenteras en aktivitet, vars syfte är att tidigt utveckla god förståelse för positionssystemet. Aktiviteten har använts i förskola och tidiga skolår. I artikeln diskuteras även några överordnade principer för undervisning.

Vid kartläggningen av nybörjarelever fokuserar man på hur man som lärare arbetar med att skapa begrepp. Det diagnostiska perspektivet blir inte lika framträdande. En didaktisk utgångspunkt vid KIM-arbetet är att ett matematiskt begrepp kan anses ha två dimensioner.



Med den numeriska aspekten menas faktakunskaper och räknefärdigheter, medan problemlösningsaspekten handlar om att kunna använda de numeriska färdigheterna för att lösa praktiska problem. Avsikten med denna uppdelning är att visa på att alla matematiska begrepp har en sådan problemlösningsaspekt. Detta betonas speciellt i den nya norska läroplanen, L 97. I inledningen till matematikdelen står det:

> *Mer vesentlig enn å pugge tabellen er det å forstå selve begrepet multiplikasjon og kunne bruke det.*
>
> KUF, s. 155.

***Bjørnar Alseth** arbetar i KIM-projektet (KIM, Kvalitet i matematikundervisningen) och är lärarutbildare vid Høgskolen i Telemark samt doktorand i matematikdidaktikvid universitetet i Oslo.*
Översättning Bo Rosén.

De rena, numeriska faktakunskaperna och räknefärdigheterna tonas ner och man lägger mer vikt på begrepp och begreppens problemlösningsaspekt.

Här presenteras en aktivitet som betonar problemlösningsaspekten. Temat är ”platsvärde och gruppering”. I undervisningen har den numeriska färdigheten traditionellt haft stor tyngd. Man har lagt stor vikt vid hur tiotalsövergången skall utföras och hur algoritmen skall ställas upp, och i mindre grad fokuserat på varför man skall utföra beräkningarna på det ena eller andra sättet. I aktiviteten kommer tiotalsövergången in som en konsekvens av elevens handlingar. Hur de tacklar detta är upp till dem själva. Tanken bakom det är att när eleverna själv finner en lösning på problemet kommer denna lösning att ha sin utgångspunkt i elevens erfarenhetsvärld. Situationen blir annorlunda än när lösningarna ges av läraren eller läroboken. Då är det risk att eleverna bara kopierar den ”officiella” lösningen utan att de förstår varför den är riktig och varför den är bra.

Platsvärde och gruppering

Platsvärde och gruppering är viktiga delar i taluppfattning. Vårt talsystem har två kännetecken. Det ena är tiotalsgruppering och det andra är sammansättningen av talsymbolerna i ett positionssystem. Detta betyder att talen får värde efter vilken plats de har, t ex i ”54” betyder 5-an ”5 tiotal”, medan 4-an betyder ”4 ental”. Vidare grupperas tiotalen i hundratal, osv.

När vi på norska eller svenska benämner talen framträder inte den systematiska ordningen så länge man använder tal mindre än 20, t ex elva, tolv och sjutton. Detta betyder att de erfarenheter som eleven har av tal i talområdet 10 – 20 inte betonar gruppering och platsvärde. Thomas (1994) visar att elever har en mycket varierad uppfattning av talsystemets struktur. I studien bad man eleverna att se talen 1 till 100 framför sig. Bara några av eleverna betonade tiosystemets uppbyggnad i sina svar. Detta kan bero på att många elever har en svag uppfattning av positionssystemets uppbyggnad.

Ann Ahlbergs finner i sin studie (1995a) att 23% av svenska 6-åringar kan ge namn åt tal större än 20. När de ska lösa enkla textuppgifter sjunker lösningsfrekvensen när uppgiften handlar om tal större än 10. Medan 77% svarar riktigt när talen är mindre än 5, svarar bara 10% korrekt när talen är i området 10 – 20. När barnen börjar i skolan är deras erfarenheter till övervägande del knutna till tal mindre än 10. Det är en viktig uppgift för lågstadieläraren att utvidga den förståelse barnen har av talbegreppet till att också omfatta gruppering och platsvärde.

Norska elevers uppfattningar

I TIMSS (Third International Mathematics and Science Study) fick norska elever på lågstadiet förhållandevis dåliga resultat på uppgifter som handlade om platsvärde. Här är ett exempel

Vilket tal skall stå i rutan?

$$2000 + \square + 30 + 9 = 2739$$

Av eleverna i 2:a klass, 8-åringar, svarade bara 18% rätt medan det internationella snittet låg på 44%. I 3:e klass svarade 45% av de norska eleverna riktigt. Här var det internationella snittet 63%. Det bör påpekas att norska elever börjar skolan ett år senare än i de flesta andra länder i undersökningen. Detta är antagligen en av orsakerna till att de fick förhållandevis dåliga resultat på TIMSS-testen i åk2 och 3. Resultaten är också betydligt sämre på denna uppgift än på testet som helhet.

Eleverna gör stora framsteg mellan åk2 och åk 3. Data från KIM-testen i *Tall och Tallregning* visar emellertid ändå på svaga prestationer också i högre årskurser. Här är en liknande uppgift från KIM-testen:

Skriv det riktiga talet i rutan:

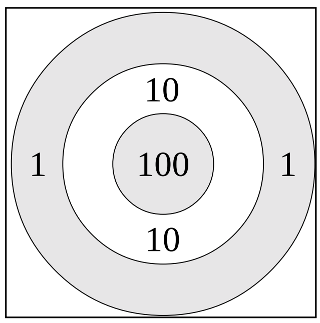
$$574 = 5 \cdot 100 + \square \cdot 10 + 4 \cdot 1$$

På denna uppgift svarar bara 48% av eleverna i åk 4, 58% i åk 6 och 77% i åk 8 korrekt. Det är många orsaker som kan ligga bakom resultaten. Matematikundervisningen i Norge har t ex i hög grad varit läroboksstyrd.

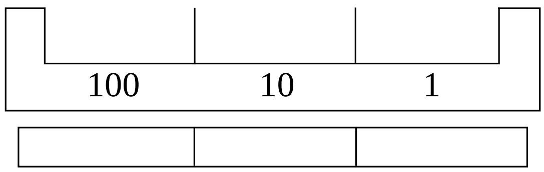
Som ett alternativ till den traditionella matematikundervisningen, föreslås i KIM-handledningen bland annat aktiviteten *Å kaste blink*. Den är utprovad för lågstadiet och utvecklad speciellt med tanke på att bidra till en grundläggande förståelse av gruppering och platsvärde. Blinken är mitt i prick. Här kallas den därför *Kasta prick*.

Kasta prick

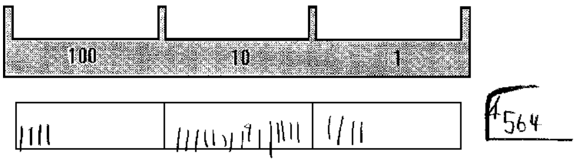
I denna aktivitet ska du, när det är din tur, kasta 5 ringar mot denna tavla.



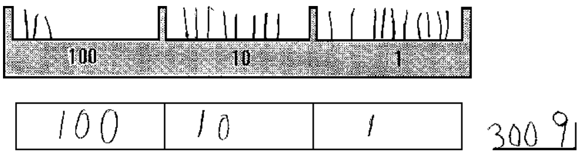
Notera träffar genom att sätta kryss i detta protkoll.



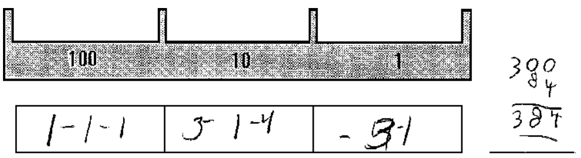
Eleverna delas in i grupper om 3 – 5 elever. Varje grupp får 5 ringar och en tavla (ungefär 1 m i diameter). De kastar i tur och ordning 5 ringar och noterar antal träffar i protokollet. Efter hand som eleverna kastar, blir det fler och fler kryss. Det finns plats i protokollet för att räkna ihop hur många poäng man har. De exempel som presenteras är från en klass där eleverna är ungefär 7,5 år, dvs de har gått lite över ett halvt år i skolan. I undervisningen har man arbetat med tal upp till och med 20.



Eleven har inte kryssat i det fält som vi hade avsett. I stället sätter han streck i rutorna under. Eleven tolkar schemat på ett annat sätt än vi hade tänkt, men han finner i alla fall den riktiga poängsumman.



Inte heller denna elev har använt schemat som vi tänkt. Han anger antalet träffar men skriver inte ner antal ental, tiotal och hundratal i rutorna nedanför. När han räknar samman finner han att han har träffat i entalsfältet 11 gånger, även om han bara markerat 10, och i tiotalsfältet 8 gånger. Detta skriver han som 91 poäng. Han har dessutom 3 hundratal. Det visade sig att flera elever hade problem med att lägga samman hundratalen med ental och tiotal.



Denna elev har noterat antalet träffar i rutorna. Uträkningen till höger ger poängsumman. Han har alltså 300 poäng samt 8 tior och 4 ettor. Att skriva beräkningen på detta sätt kan tyda på att han har lärt det av äldre syskon.

Dessa tre exempel visar att eleverna tolkar protokollet på olika sätt. Genom att använda schemat, får eleverna hjälp med att hålla reda på poängsumman under tiden. Medan de kastar behöver de bara pricka av det sista kastet, det vill säga de sista 5 ringarna. Schemat är också till hjälp när de, efter att ha kastat några gånger, skall finna totalsumman. Då kan man räkna kryssen, något som är enklare än räkning med talsymboler. Ett vanligt sätt är att de räknar antal ettor och tior och lägger ihop dessa och eventuellt skriver ner svaret. Därefter räknar de hundratalen och lägger till den första summan. Vår erfarenhet är att de allra flesta elever i denna ålder kan använda schemat för att få översikt över antalet träffar. Många elever kan också få fram en totalsumma för flera kast. Detta gör de på flera olika sätt.

Problembaserad undervisning

Följande bygger på Bells (1993) principer för undervisning och Alseths (1995) tolkning av dessa.

Utgångspunkt är att undervisningen skall utgå från en situation, som eleverna är förtrogna med. Från denna kan sedan eleverna arbeta med uppgifter där de möter något okänt. Det är vid detta möte mellan känt och okänt som eleverna lär. Det okända tolkas i förhållande till de erfarenheter eleven har gjort tidigare. Grundläggande principer är:

1. Börja med något som eleverna har kunskap om sedan tidigare.
2. Ge uppgifter som innehåller något okänt.
3. Låt eleverna få utrymme att tolka detta nya och att reflektera över de erfarenheter de har gjort.
4. Befäst kunnandet och repetera.

I det följande fördjupas dessa punkter med hänvisning till aktiviteten ovan.

1. Utgångspunkt i en situation

I stället för att direkt ge uppgifter, som eleverna skall arbeta med, utgår undervisningen från en situation. Denna skall fungera som en språngbräda för elevens utveckling. Situationen bör innehålla stoff som eleven har god kunskap om. I exemplet utgör själva spelet den kända situationen.

Situationen ska vara så välbekant att eleven kan leva sig in i den. Detta kan göras i vardags- eller praktiska situationer, men det kan också göras i olika spel. En tredje möjlighet är att utgå från en äventyrs- eller fantasisituation. Det viktigaste kravet är att eleven snabbt förstår vad som är huvudidén.

Ett annat krav är att uppgiften innehåller de matematiska begrepp som eleverna skall arbeta med. I exemplet är det att spelet ger poängsummor – uppbyggda av 1, 10 eller 100 poäng – som strukturerar aktiviteten runt gruppering och platsvärde.

Ett sista krav på situationer är att de bör kunna ge utrymme för individualisering. Situationerna bör vara så pass enkla att alla elever förstår grundidén. Dessutom bör de vara så pass öppna, att de kan utvidgas så att de duktigaste eleverna kan finna utmaningar. Vid utprövningen av blinkaktiviteten, visade det sig att några elever var väldigt engagerade i att bestämma totalsumman. Andra nöjde sig med att kryssa av antal riktiga poäng i protokollet, men också dessa elever visste hela tiden vem som ledde. De jämförde antal kryss i 100-kolumnen. De visste att den hade högst värde. Om det var lika där måste de jämföra antal kryss i 10-kolumnen.

2. Uppgifter med något okänt

När läraren har presenterat det hon vill att eleverna ska arbeta med är det nödvändigt att specificera vad man vill att eleverna skall göra. En sådan specificering ger aktiviteten en inriktning. Elevens arbete fokuseras på de matematiska begrepp läraren vill att de skall få erfarenheter av. Vid utarbetandet av ”blinkaktiviteten” gjorde vi försök där eleverna inte fick något protokoll – bara spelbräde och ringar. Resultatet blev inte lyckat. Poängen beräknades då bara med hjälp av symboler, och det klarade inte alla av. De övriga eleverna deltog inte heller i att skriva upp och beräkna poängsumman. De var bara med och kastade. Genom att precisera att uppgiften bestod i både att kasta och kryssa av varje kast i protokollet ändrades uppgiftens karaktär. Detta gjorde att alla elever deltog, om än på olika sätt.

Detta är en förhållandevis styrd aktivitet. Graden av specificering påverkar naturligtvis elevernas aktivitet i klassrummet. Om man låter eleverna fritt välja uppgifter de skall arbeta med, och vad själva innehållet i aktiviteten ska vara, kommer vi ganska nära ”fri lek”. Denna form av aktivitet har många positiva pedagogiska sidor, som det är viktigt att läraren tar till vara. När det gäller undervisning i matematik så har den i stort sett ett mer eller mindre bestämt mål. Därför blir det i de allra flesta fall nödvändigt att ge aktiviteten en inriktning genom att bestämma uppgifter som eleverna skall arbeta med. Jaworsky (1994) kallar detta *a mathematical challenge*. Det är emellertid viktigt att påpeka att också fri lek kan användas som utgångspunkt för diskussion kring matematiska begrepp. Ofta innefattar barnens lek matematik, t ex genom att de använder tal, geometriska former eller liknande. När leken är färdig, kan läraren arbeta med matematiken och använda leken som en situation, en utgångspunkt i undervisningen. Ett exempel på en öppnare uppgift ger Ann Ahlberg (1995b).

När situationen är bestämd, är det ofta önskvärt att den innehåller flera, varierade uppgifter. Det tar tid att etablera en situation som eleverna är förtrogna med. Det är därför viktigt att utnyttja den så mycket som möjligt. I vårt exempel kan det röra sig om att utnyttja blink- eller protokollidén till andra spel. Därmed blir den bättre utnyttjad än om eleverna bara skulle lösa en enda uppgift i den givna kontexten – så som traditionen är med ”vanliga” matematiska textuppgifter.

3. Tolkning och reflektion

Det är viktigt att eleverna får anledning att reflektera över de erfarenheter de har gjort i en aktivitet. Som lärare bör vi ställa oss frågan vad som är avsikten med de uppgifter eleverna löser. Till att börja med är det viktigt att finna lösningar på uppgifterna. Men huvudavsikten är att eleverna skall göra erfarenheter som ger dem kunskaper, som de också kan använda när de ställs i andra eller liknande situationer. Det är viktigt att eleverna inte fastnar i den praktiska situationen utan att de stimuleras till att plocka fram matematiken ur den praktiska kontexten. Ett sätt att göra de matematiska begreppen synliga är att reflektera över det man har gjort. Denna reflektion kan ske efter det att uppgiften är löst. Eleverna berättar för varandra hur de löste den. Reflektionen kan fördjupas genom att eleverna byter grupper. I exemplet kan eleverna diskutera andra sätt att beräkna poängsumman på.

Reflektion kan åstadkommas genom att läraren varierar situationen. Han kan ge två snarlika uppgifter från två olika situationer. Då kan eleverna värdera sina egna sätt att lösa uppgifterna i de båda situationerna – Skulle man kunna använda samma lösningsmetod? Varför, Varför inte? I avsnittet ”Uppgifter med något okänt” understryks vikten av att variera uppgifterna i situationen. Detta är nödvändigt för att göra matematiken synlig. Men det är också viktigt att variera situationerna. I exemplet kan det göras genom att man introducerar en ny situation som handlar om gruppering och platsvärde, t ex låta eleverna räkna stora talmängder (t ex monopolpengar). Genom att lösa uppgifter med samma struktur (i detta fall gruppering/platsvärde) i olika situationer ges eleverna möjlighet att upptäcka den gemensamma, underliggande principen i situationen. Därmed får de också uppleva att de lösningsmetoder de använder kan generaliseras. I det här fallet är det knappast tal om abstrahering i strängt matematisk betydelse, men generalisering i betydelsen att samma lösningsmetoder kan användas i olika situationer.

Avsikten med denna reflektion är att fokus flyttas från den praktiska situationen till lösningsmetoderna och de matematiska begreppen. Därför är denna fas mycket viktig för elevernas utbyte och lärande.

4. Konsolidering och repetition

När eleverna har utvecklat egna metoder för att lösa problemen och reflekterat kring dem är det nödvändigt med en period för att befästa kunnandet. Under denna kan eleverna lösa liknande uppgifter med hjälp av de metoder de har utvecklat. En sådan repetition bidrar till att den enskilde eleven blir säkrare på att använda metoden. Med Piagets terminologi kallas detta assimilation. Eleven har kunskapsstrukturer som passar till de uppgifter han skall lösa. Lösandet av uppgifter går mer och mer av sig själv. Genom repetition kommer dessa kunskapsstrukturer att bli ännu mer förstärkta.

En annan positiv effekt vid repetitionen är att eleverna ofta modifierar sina metoder. När de löser flera uppgifter med samma metod utvecklar de efter hand smartare varianter att lösa uppgifterna på.

Representationer

Ett sista sak som bör påpekas, när det gäller blinkaktiviteten, är att där utnyttjas olika representationer. Utgångspunkten är några händelser där barnen gör konkreta erfarenheter med fysiska objekt. De kan se om ett kast är bra eller dåligt utifrån var ringen landar i förhållande till tavlans mitt. Detta sker oberoende av storleken på de tal som är angivna på tavlan – ett kast nära mitten är bra, ett utanför är dåligt.

Nästa representationsfas sker när kasten noteras i schemat. En träff i mitten av blinken representeras av ett kryss i utrymmet över ”100”. På så sätt åstadkoms en figurativ modell av kasten. Både själva kastet och kryssen i protokollet kan leda till att barnen uttrycker det antal poäng de har med tal. Det gäller både för enskilda kast, ”Jag träffade en tia”, och för flera kast tillsammans: ”Jag fick 22 poäng”. Till slut kommer någon av eleverna att uttrycka träffarna med hjälp av matematiska symboler (talsymboler).

Lesh m fl (1987) diskuterar fem representationer vid problemlösning och lärande:

1. ”Real scripts” – verkliga händelser som ger underlag för tolkning och problemlösning.
2. Manipulativa modeller, tärningar eller liknande. De har liten anknytning till verkligheten i sig men tar till vara relationerna/operationerna i situationen.
3. Bilder och diagram – modeller som på samma sätt som manipulativa modeller saknar en direkt anknytning till verkligheten i sig. Både de manipulativa och figurativa modellerna internaliseras som ”images”.
4. Det talade språket
5. Skrivna symboler

I blinkaktiviteten gäller det övergångar mellan fyra av fem representationsformer. Det är också möjligt att göra manipulativa modeller för att hålla kontroll på den totala poängsumman, så att man på så sätt tränar alla fem formerna. Man kan tex använda jetonger med tre olika färger, en för att hålla reda på antal hundratal, en för antal tiotal och den sista för antal ental. Lesh och många andra (t ex Janvier, refererat i Grønmo & Rosén, 1997, Skolverket 1997) poängterar att förmåga att hantera övergångar mellan olika representationsformer är mycket viktigt för att tillägna sig matematiska begrepp. Därigenom ges eleven möjlighet att lösa matematiska problem.

> *Good problem solvers tend to be sufficiently flexible in their use of a variety of relevant representational systems that they instinctively switch to the most convinient representation at any given point in the solution process.*
>
> Lesh, Post & Behr, s. 38

Genom att låta undervisningen baseras på sådana aktiviteter blir förståelsen av de matematiska symbolerna direkt knuten till en eller annan praktisk situation. Symbolerna får förankring i elevens egen erfarenhet. Detta är tvärt emot traditionell matematikundervisning, där undervisningen i övervägande grad fokuserar på symbolerna i sig. I KIM-materialet för åk 1 – 3 föreslås att undervisningen både tar hänsyn till symbolmanipulering och tekniska färdigheter och till de praktiska och problemlösande sidorna av matematiken. Detta kan göras genom att delar av undervisningen utgår från praktiska situationer och problem. Kunnande utvecklas genom reflektion över erfarenheter från aktiviteter i situationerna. Undervisning som på detta sätt tar till vara och bygger vidare på den insikt barnen har, medför att de utvecklar begrepp som har ett säkert fundament och ett brett användningsområde.

Referenser

Ahlberg, A. (1995a). *Att möta matematiken i förskolan. 6-åringars förståelse av tal och räkning.* Rapport nr 1995:08, Göteborgs universitet, Institutionen för pedagogik.

Ahlberg, A. (1995b). *Att möta matematiken i förskolan. Matematiken i temaarbetet.* Rapport nr 1995:14, Göteborgs universitet, Institutionen för pedagogik.

Alseth, B. (1995). Bruk av åpne oppgaver i matematikkundervisningen. *Tangenten 6(2),* 18-26.

Bell, A. (1993). Teaching design principles. *Educational Studies in Mathematics 24(1),* 5-34.

Jaworski, B. (1994). *Investigating Mathematics Teaching.* London: Falmer Press.

KUF. (1997). *Læreplanverk for norsk grunnskole.*

Lesh, R., Post, T. & Behr, M. (1987). Representations and translations among representations in mathematics learning and problem solving. I C. Janvier, (red), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics.* Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum.

Grønmo, L. S. & Rosén, B. (1997). Elevers uppfattningar av funktioner. *Nämnaren 24(1),* 43-47.

Skolverket (1997). *Kommentar till grundskolans kursplan, Lpo 94 och betygskriterier i matematik.* Stockholm: Liber distribution.

Thomas, N., Mulligan, J. & Goldin, G. A. (1994). Children´s representations of the counting sequence 1-100: Study and theoretical interpretations. I J. P. da Ponte & J. F. Matos, (red), *Proceedings of the PME 18, nr 3,* s. 1-8, Lisboa: PME.