

Verkliga och konstruerade problem

Ambitionen att anknyta matematiken till verkligheten och att försöka konkretisera med realistiska exempel kan ibland leda till mindre lyckade och ibland absurda frågeställningar, menar Bengt Ulin i denna artikel.

Som de flesta matematiklärare känner till är omfattningen av problem i ordets verkliga betydelse underdimensionerad i skolan i jämförelse med mer eller mindre rutinartad räkning. Övningar av det senare slaget är dock både nödvändiga och viktiga i grundskolan.

Den tillämpade matematiken hämtar i regel sitt material från vardag, natur eller teknik och har därigenom även ett allmänbildande värde, förutsatt att uppgiften är realistisk och inte utgör en artificiell skrivbordsprodukt. Om den är konstgjord verkar den enligt min mening destruktivt på elevens verklighetsuppfattning. Vad jag särskilt vänder mig mot är problem vars formulering innebär ett falskt sken av realism. Jag anser att räkneuppgifter som inte är hämtade ur verkligheten inte heller ska ge sken av att vara autentiska.

Gammal räknekonst och New Math

Trots att matematiken i det forntida Egypten och i Babylonien var rätt olikartad uppvisade den en intressant likhet: artificiella uppgifter gavs som övning. Vad sägs om följande uppgift från Babylonien, hämtade ur samlingen YBC 4652, upptecknad i kilskrift på en lerplatta och återgiven i *The treasury of mathematics* av Henrietta Midonick:

Jag fann en sten men vägde den inte; sedan jag subtraherat en sjundedel, adderat en elftedel och subtraherat en trettondel vägde jag den: vikten var nu 1 ma-na. Vad vägde stenen ursprungligen?

En konstlad uppgift, även om stenen hade bytts ut mot något annat objekt. I den egyptiska Papyrus Rhind (i modern tappning) finner vi:

7 lantbrukare hade 7 katter vardera, som var och en dödar 7 möss. Varje mus hade ätit 7 kornax, som hade givit 7 mått spannmål om de blivit sådda. Hur stor är summan av antalen lantbrukare, katter, möss, ax och mått?

Det märkliga är den absurda frågeställningen.

Detta påminner mig om de inledande mängdproblemen i *The New Math* som introducerades i Sverige omkring 1970 – vid en tidpunkt då den befann sig på stark tillbakagång i USA. Åtminstone i den svenska versionen bildade man ”mängder” av de mest disparata ting, exempelvis en nyckel, ett äpple, en fotboll, en ko och en bok. Här framställdes på ett okonstnärligt sätt en rad uppgifter i strid mot matematiska begrepp – en häpnadsväckande, absurd kombination av misstag.

Svenska exempelsamlingar

I *Aurelius räknelära* från 1614 återfinner jag i kapitel 4, *Multiplicatio*, det fornegyptiska exemplet i en snarlik form:

Uthi een byy boo tilsamman 9 Bönder / hwar there hafwer 8 Hanar. Hwar Hana hafwer 9 hönor med sigh. Och hwar höna hafwer 16 kyklingar. Nu wil iagh gerna wetta / huru många kyklingar ther äre?

Förtjänstfullt nog varieras här multiplikationsfaktorn och någon absurd summering efterfrågas inte. I kapitel 19, *Regula falsi*, dyker emellertid en tillgjord övning upp:

En Son sporde sijn Fadher huru åldrich han war. Han swarar / och sägher sigh hafwa så många åhr / om man $\frac{1}{2}$ parten af hans heele ålder ther till ladhe / och af Summan subtraherede thes $\frac{1}{4}$ deel / Så wore han äwfen 99 åhr gammal. Hur många åhr hadhe han?

Vem skulle numera vilja utsätta sitt barn för en sådan exercis?

Under min skolverksamhet samlade jag många udda uppgifter. Några som hade karaktär av bakvänd praktik har fastnat i mitt minne. Här är två exempel:

- ♦ Eleven får veta järnvägsavståndet mellan Stockholm och Göteborg samt det antal varv som ett lokhjul roterar under färden mellan dessa städer. Vilken diameter har hjulet?
- ♦ En pojke ska bära hem en påse med 20 ägg men tappar den i backen. Väl hemma finner man att 4 ägg hade krossats. Hur många ägg var hela?

Nog hade uppgiften varit mer realistisk om antalet hela ägg hade angivits och antalet mosade ägg efterfrågats.

Några stickprov i dagens exempelsamlingar tyder på att arten tillgjorda räkneuppgifter tack och lov är i utdöende. Ännu finns dock en och annan skrivbordsprodukt. Några exempel får belysa detta (det första i samma stil som Aurelius åldersproblem ovan):

- ♦ Gammelfarfar har födelsedag. De 7 första gästerna har medelvärdet 21 år. Den åttonde gästen, Joakim, höjde medelvärdet till 22 år. När den 29-åriga Maria kommit blev medelåldern, inklusive gammelfarfar, 30. Hur gamla var Joakim och gammelfarfar?
- ♦ Vatten har läckt in i en källare. Mamma räknar ut att det är 5000 liter vatten i källaren. Golvets mått är 7,5 m x 4,2 m.

Med denna kännedom ska eleverna räkna ut vattenhöjden. Jag skulle tro att mamman mätte vattenhöjden innan hon gjorde sin beräkning. Det realistiska vore att ange vattenhöjden och be eleverna räkna ut volymen. Ambitionen att ge uppgifter som är autentiska i relation till vardagen är lovvärd, men man får se upp med en konstlad inramning.

Den berömda Euler var under två långa perioder av sitt liv verksam i Sankt Petersburg. Han skrev en lärobok för ryska skolbarn som blev mycket uppskattad och användes under ett helt sekel. I den finner vi:

En mulåsna och en åsna bär vardera ett antal pud. Åsnan beklagar sig över sin last och säger till mulåsnan: om du ger mig ett pud av din last, så har jag dubbelt så tung börda som du. På detta svarar mulåsnan: om du ger mig ett pud av din last, så får jag tre gånger så mycket last som du. Hur många pud bär respektive djur?

Uppgifter får gärna ha ett inslag av fantasi med eller utan bäring på vardagen och det får gärna vara ett stänk humor i uppgiften.

Trovärdig allmänbildning

Särskilt viktigt är det med aktuella exempel på tillämpad matematik för elever på grundskolans högstadium. Frågeställningen ska kännas intressant. Givetvis ska dessutom de data som ges vara tillförlitliga. I en samling fann jag ett exempel som väckte mitt tvivel:

Honan hos den åttaarmade bläckfisken väger 10 kg. Hanen väger 40 000 gånger mindre. Hur mycket väger hanen?

För att få klarhet tog jag kontakt med biologen Anders Warén på Naturhistoriska riksmuseet i Stockholm. Enligt honom är förminskningsfaktorn 40 000 felaktig. Hanens vikt avviker inte anmärkningsvärt från honans. Om problemkonstruktören ville imponera med en ändringsfaktor kunde tex vikten hos ett ekollon ha jämförts med vikten hos en fullvuxen ek.

Karaktär, stil och variation

Språket spelar som bekant en stor roll när matematikuppgifter formuleras. När det gäller uppsatser brukar vikten av konsekvens i språket betonas och även i skolmatematiken bör vi tänka på stilen. För min del ogillar jag uppgiftsformuleringar av följande typ:

I en trädgård var 20 % av träden äppelträd, en fjärdedel var päronträd och 15 % plommonträd. Dessutom fanns det 24 körsbärsträd. Hur många fruktträd växte i trädgården?

Att ange trädfördelningen på detta sätt är konstlat. Dessutom dyker andelen en fjärdedel upp mitt ibland procentuttrycken. Här har konstruktören försökt kombinera olika sidor av procenträkning och då förlorat realismen. För att procentandelarna ska ge heltal för alla sorters fruktträd har det totala antalet träd satts till 60, ett passande specialfall.

Det finns verkliga problem

Det är bra med träning och många elever kräver upprepning av uppgifter inom en kategori. När man då varierar formuleringarna gäller det att upprätthålla kontakten med realiteterna. Det finns olika sätt att variera övningarna i matematik med hjälp av realistiska problem. I tidningar och nyhetssändningar kan man få uppslag till verkliga problem, och eleverna får samhällskunskaper på köpet.

- ◇ Enligt nyheter i september 2010 ägde 14 % av befolkningen 70 % av kapitalet i Egypten. Hur många gånger mer pengar har i genomsnitt en av dem som tillhör dessa 14 % än en person i genomsnitt från den mindre bemedlade kategorin?
- ◇ Vid en enkät 2011 bland cyklister i Stockholm angående motivet till att de använde cykel framkom enligt SVT 1 att
 - 91 % gjorde det för motionens skull
 - 85 % cyklade för att vinna tid
 - 72 % använde cykel för att skona miljön
 Hur många procent av de cyklande angav minst två av dessa skäl?
- ◇ Norrenergi i Solna har låtit Rodo-verken bygga två ackumulatorer. Det handlar om vertikala cisterner, vars mellandel är en cirkulär cylinder med höjd 24 meter. Avslutning upptill och nertill är en halvsfär med samma radie som cylinderdelen, 4,77 meter. Hur många kubikmeter rymmer en sådan cistern?

I åtminstone årskurs 9 och på gymnasiet kan man dra stor nytta av Högskoleprovets NOG-del. Problemlösarna ska där bedöma vilken information som är tillräcklig, men inte överflödigt, för en viss uträkning. I skolan kan man strunta i tidsbegränsning och i stället låta eleverna motivera sina svar. Även högskoleprovets DTK-del är värdefull med sina diagram. (Ett exempel på en sådan uppgift finns på *Nämnaaren på nätet*.)

En verklig guldgruva är samlingar från 1900-talets realexamensprov, där det handlar om en mängd praktiska objekt från snöplogning och kraftverk till trädgårdsland och aktier.

Utväxlingen hos en bil som körs på högsta växeln är 1:4,5 mellan motoraxeln och bakaxeln, dvs motoraxeln måste göra 4,5 varv för att bakhjulet ska göra ett varv. Med vilken hastighet i km/tim kör bilen på högsta växeln då motoraxelns varvtal är 3000 per min? Bakhjulets yttre diameter är 26,5". 1" = 2,5 cm. Som närmevärde på π används 3,14.

(ur Hedström-Öije, *Matematiska uppgifter i realexamen*, 1961)

Den rena matematiken

"Ren matematik" med kvalitativa problemställningar, som inte mynnar ut i ett antal meter, grader eller ton, kan ge stort svängrum för undersökning och stimulans. Även sådana problem borde få engagera eleverna i betydligt större utsträckning under hela deras skolgång. Här finns utrymme för nya och viktiga insatser som kursplanekonstruktörer och läromedelsförlag borde uppmuntra i en uthållig och omsorgsfull samverkan.

LITTERATUR

- Aurelius, A. *Räknelära från 1614*, Föreningen för svensk undervisningshistoria och Bengt Johansson. Uppsala 1995.
- Midonick, H. (1965). *The Treasury of mathematics: I*. London: Penguin Books.
- van der Waerden, B L. *Science Awakening*, Noordhoff, 1954; Kluwer 1973; alternativt: *Erwachende Wissenschaft*, Birkhäuser 1956, 2.a upplaga 1966.