Lucian Olteanu

Proportioner och reguladetri

I denna artikel uppmärksammas en uppställning i proportioner med anor från medeltiden. Författaren framhåller att denna metod ligger nära vårt vardagliga tänkande och att den stimulerar till problemlösning. Samspelet mellan metod och idé är ofta komplext då man ska försöka lösa ett problem. Reguladetrins typiska uppställning kan leda till ett kreativt sökande efter passande proportioner i problemställningen inom flera skilda matematikmoment.

Förmågan att lösa problem är en ofta uppmärksammad kompetens som diskuteras flitigt både i Sverige och internationellt. Det är ett område som fått allt större utrymme och ökad tyngd. Goda kunskaper och en systematisk förståelse för matematikens redskap underlättar tänkandet och skapar möjligheter att lösa problem. Problemlösning är ett av de viktigaste målen för undervisningen i matematik och skapar också positiva attityder och känslor hos eleven.

Forskare från olika traditioner definierar begreppet problemlösning på olika sätt. Möllehed (1993) hävdar att de problem som räknas som problemlösning är sådana som eleverna inte har träffat på tidigare och inte har några bestämda lösningsstrategier för från början. Unenge (1988) definierar problemlösning som ett mål där matematik används som ett hjälpmedel. Han betonar vikten av problemlösning och vill gärna se en koppling mellan vardagen och problemlösningen. Hagland, m fl (2005), definierar ett problem som en uppgift, vilken en individ vill eller behöver lösa, men som saknar given procedur och som kräver ansträngning för att lösa. Pólya (1970) menar att när man försöker lösa ett problem måste man imitera och observera hur andra människor går till väga när de löser samma eller liknande problem. Genom att arbeta på detta sätt utvecklas en förmåga hos individen att lösa problem. För mig betyder problemlösning att eleverna ska använda tidigare kunskaper i nya situationer, något som också poängteras i Marton, m fl (2004).

Den modell som framförs och diskuteras i denna artikel baserar sig dels på välgrundad teori, dels på mina egna erfarenheter av undervisning i matematik. Presentationen kan förhoppningsvis ge idéer och vara en inspirationskälla för andra lärare. Metoden kan också väcka diskussion kring läromedlens roll i undervisningen. Varje lärobok och varje provräkning innehåller ett antal problem att lösa. En del är så kallade övningsexempel, tillämpningar av nyss inlärda begrepp eller metoder för att eleverna ska kunna befästa dem. I sådana övningar är den operation man ska använda, t ex multiplikation eller division, oftast helt given. Vid exempelvis procentuppgifter använder eleverna multiplikation om de ser procenttecken och de gör detta hela tiden tills man inför ett nytt avsnitt i vilket man använder division. Men i det verkliga livet finns inga skyltar som talar om att man ska multiplicera eller dividera.

Problemlösning och problemlösningsförmåga

Skolverkets kvalitetsgranskning *Lusten att lära med fokus på matematik* (Skolverket, 2003) visar att elevers lust till ämnet har minskat. Jag har i mitt arbete som gymnasielärare märkt att en del elever tyvärr har fått dåligt självförtroende och negativa erfarenheter genom upprepade misslyckanden med problemlösning. En anledning till detta är att många elever har svårt att skilja på den mängd *olika* metoder som presenteras i läromedlet anpassade för att lösa olika slags specifika matematiska problem. Skoogh och Johansson (1991) specificerar att en viktig fas i problemlösning är att eleven ska tänka igenom vilken metod som bör användas. Men det är just här eleverna tappar bort sig. Ofta ställer eleverna följande frågor när de löser problem som handlar om exempelvis skala, topptriangelsatsen eller transversalsatsen: Vad ska jag göra här? Vilken metod ska jag välja av alla möjliga? Dessa frågor avslöjar att eleverna inte förmår inse hur de olika delarna hänger ihop med varandra och hur det som söks är relaterat till det som är givet för att kunna komma fram till en lösningsidé.

För att eleverna ska utveckla sin problemlösningsförmåga behöver de behärska baskunskaperna och få lära sig några få enkla strategier för problemlösning för att på så sätt kunna lösa många slag av nya problem. Därför är det viktigt att lärarna kan finna och presentera generella metoder för att lösa problem av liknande karaktär istället för att lära ut specifika metoder som enbart används för varje speciellt fall. På så sätt kan eleverna fokusera på problemet som helhet och se likheter med andra problemtyper, och de kan ta fasta på delarnas relation till varandra och till helheten, istället för att ständigt växla mellan olika specialmetoder. Mot denna bakgrund tänker jag re-aktualisera den traditionella och väl beprövade lösningsmetoden *reguladetri*, en metod som kan få matematiken att bli mer lättillgänglig, meningsfull och lustfylld.

Min poäng är att den uppställning i proportioner som är typisk för reguladetri ligger nära hur vi uppfattar mönster och strukturer hos verkliga objekt, vilket gör det lättare att i nästa steg generalisera dem, en process som är grundläggande för matematiskt tänkande också vid problemlösning. Begreppet *reguladetri* (regula aurea) har förekommit i Sverige ända sedan 1614 då Aegidius Aurelius gav ut *Arithmetika*, den första tryckta läroboken i aritmetik i Sverige.

Reguladetri

För att underlätta för läsaren att se hur reguladetri kan användas för att lösa olika problem kommer jag först att införa tre definitioner och sedan en fundamental egenskap för proportioner.

- *Reguladetri* (från lat. ”regeln om tre”) innebär metoden att beräkna den okända fjärde storheten utifrån tre kända storheter i en *proportion.*
- Om två storheter har konstant kvot sägs de vara *direkt proportionella*, dvs storheterna växer eller avtar linjärt, samtidigt. Reguladetri handlar om sådan proportionalitet.

- *Proportion* (från lat *proportio*). En likhet mellan två kvoter (förhållanden), av formen: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, där a, b, c, d är storheter, som kan identifieras med tal. Exempel: $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$ och $\frac{6}{7} = \frac{\frac{9}{2}}{\frac{21}{4}}$ är proportioner. Uttrycket $\frac{10}{2} = 5$ är i så fall ingen proportion till formen, men kan bli det om vi skriver: $\frac{10}{2} = \frac{5}{1}$.

Storheterna a, b, c, d i en proportion kallas för termer. En proportion $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ har fyra termer a, b, c, d. Man kallar a, d för yttersta termer och b, c för mellersta termer.

- *Fundamental egenskap för proportioner*: I en proportion är produkten av yttersta termerna a och d lika med produkten av de mellersta b och c. Alltså: produkterna diagonalt (”korsvis”) är alltid lika: $a \cdot d = b \cdot c$. Detta beror på att båda leden kan multipliceras med nämnarna b respektive d. Exempel:

  I proportionen $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$ gäller $3 \cdot 8 = 4 \cdot 6$.

Dessa tre definitioner och proportionernas grundläggande egenskap kan vara utgångspunkten för problemlösning inom många olika områden som procent (beräkna procentsatsen, delen, det hela), promille, ppm, ränta, moms, index, skala, ekvationer i proportionsform, statistik, likformighet, topptriangelsatsen, transversalsatsen (Thalessatsen) och olika slags jämförelser.

Vi kan lägga märke till att tillämpningsområdena varierar, men att metoden att ställa upp proportionen är densamma. Genom att hålla metoden invariant har eleverna möjlighet att fokusera på textförståelse, resonemang och hur ingående data i ett problem förhåller sig till varandra för att de ska kunna hitta den grundläggande uppställningen som en proportion. På så sätt slipper eleven försöka memorera vilken lösningsmetod som ska användas för varje specifik problemtyp. Här följer några olika problemtyper där reguladetrins proportionstänkande fungerar väl:

Problem 1

Man vet att 8 liter blyfri bensin kostar 74 kronor. Hur mycket kostar 23 liter?

Jag kommer att presentera två metoder för att lösa detta problem.

- Reducering till enheten:
  Denna metod är den moderna, som återfinns i läromedlen, där man först vill uttrycka enheten. Om 8 liter bensin kostar 74 kr, så kostar 1 liter $\frac{74}{8}$ kr. Det innebär att 23 liter kommer att kosta $\frac{74}{8} \cdot 23$ kr.

Man kan använda följande schema:

8 liter	74 kr
1 liter	$\frac{74}{8}$ kr
23 liter	x kr

Alltså $x = \frac{74}{8} \cdot 23 = 212{,}75$ kr.

- Proportionsmetoden

  Här kan vi direkt använda följande schema:

8 liter	74 kr
23 liter	x kr

Man bildar proportionen $\frac{8}{23} = \frac{74}{x}$ och löser ut $x = \frac{23 \cdot 74}{8} = 212{,}75$ kr.

Obs. Man kan skriva beloppet (kronor) i första kolumnen och kvantiteten (liter) i den andra. Resultatet blir detsamma.

74 kr	8 liter
x kr	23 liter

Man får proportionen $\frac{74}{x} = \frac{8}{23}$ som ger $x = \frac{74 \cdot 23}{8} = 212{,}75$ kr.

Proportionsmetoden gäller som tidigare nämnts enbart för direkt proportionella storheter. En minnesregel för att få den fjärde termen i en proportion är att man multiplicerar på den ”diagonal” som innehåller två kända termer och att produkten divideras med den tredje (alternativt kan man dividera båda leden med den tredje, i fallet ovan 8).

Skillnaden mellan dessa metoder är att den första metoden fokuserar på räknefärdigheter, medan den andra utvecklar elevernas begrepps- och resonemangsförmågor eftersom metoden bygger på förståelse av den vardagsnära proportionen mellan de storheter som ingår. Dessutom kan de, om metoden behålls konstant, upptäcka gemensamma mönster för olika problemtyper, mönster som kan generaliseras och prövas även inom helt nya matematiska områden.

Resultatet som publicerades i TIMSS Advanced 2008 (Skolverket, 2009) visar att av de elever som läst minst Matematik D och Fysik B på naturvetenskapligt eller tekniskt program kunde enbart 30 % välja det korrekta svaret i följande problem:

> Dorris gör en stor bröddeg som är en och en halv gånger originalreceptet. Om det står $\frac{3}{4}$ deciliter socker i originalreceptet, hur många deciliter socker behöver Dorris till sin deg?
>
> A) $\frac{3}{8}$ B) $1\frac{1}{8}$ C) $1\frac{1}{4}$ D) $1\frac{3}{8}$

Detta kan vara ett tecken på att elever inte utvecklat en generell förmåga att se relationer mellan olika proportioner. Eleverna kunde ha resonerat på följande sätt:

1 (originalrecept)	$\frac{3}{4}$ dl
$\frac{3}{2}$ ($= 1\frac{1}{2}$ originalrecept)	x dl

$$x = \frac{\frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4}}{1} = \frac{\frac{9}{8}}{1} = \frac{9}{8} = 1\frac{1}{8}\text{ dl}$$

Erfarenheter från undervisning

Ett exempel på ett lyckat resultat illustreras här av en lärare som hösten 2009 och våren 2010 arbetade med stödlektioner för att hjälpa eleverna att uppnå målen, och som systematiskt använde reguladetri i olika sammanhang. Istället för att jobba med procent, skala, jämförelse och liknande moment på det sätt som presenteras i olika läromedel, introducerade läraren reguladetri så som det beskrivs ovan. I slutet av kursen skrev de 14 eleverna nationella provet i matematikkurs A, vt 2010 (se www.prim.su.se).

I problem 1, om ett recept på chokladtårta för 6 personer med bl a 100 g choklad, var uppgiften att beräkna mängden choklad till ett recept för 15 personer. Detta löste samtliga elever med reguladetri. Problem 6 handlade om att låna 3000 kr. I deluppgift a skulle räntekostnaden beräknas då räntesatsen var 5,6 % och i b-uppgiften skulle räntesatsen beräknas om kostnaden för ett sms-lån var 375 kr per månad, dvs 4500 kr om året. En elev löste problemet på följande sätt:

a)

3000 kr	100%
Årsränta (kr)	5,6%

$$\text{Årsränta} = \frac{5,6 \cdot 3000}{100} = 168\text{ kr}$$

b)

1 månad	375kr
12 månader	Ränta i kr

$$\text{Ränta i kr} = \frac{12 \cdot 375}{1} = 4500\text{ kr}$$

3000kr	100%
4500kr	ränta (%)

$$\text{Ränta (\%)} = \frac{4500 \cdot 100}{3000} = 150\%$$

Resultatet, såsom det presenteras av PRIM-gruppen, respektive resultatet från eleverna som deltog i stödlektioner visas i följande tabell:

Tabell 1. *NpMaA vt 2010*

Uppgift	NP urval 4990 elever	Elever som deltog i stödundervisning (MaA)
1	90%	100%
6a	69%	85%
6b	39%	85%

Resultaten i denna enkla jämförelse bevisar inget, men pekar på att de elever som hade stora problem med att förstå sambandet mellan vilken metod som kan passa för respektive problem under matematikkurs A genom reguladetri nu blivit säkrare på att resonera sig fram till en lösning. Indirekt framgår det att eleverna också utvecklat sin begreppsförmåga och resonemangsförmåga. Med hjälp av samma reguladetritänkande som de använde i uppgift 1 kunde de också besvara uppgift 6a, och även 6b, som enligt bedömningsanvisningarna ligger på G- och VG-nivå.

Diskussion

I vårt vardagsliv hanterar vi ständigt problem där vi väger alternativa lösningar mot varandra och tar ställning till framkomna resultat. Proportionalitet är ett viktigt begrepp i matematik samt i den tillämpade matematik som förekommer i vardagen. Vanligast är den direkta proportionaliteten där en storhet är direkt proportionell mot en annan. De senaste åren har vi i skolan fokuserat mycket på elever med läs- och skrivproblem och med specifika matematiksvårigheter. Motiverade elevers problem och behov att utvecklas har inte fått samma uppmärksamhet. För många av dessa elever blir misslyckanden fatala, när de inte ens kan lösa enkla problem. Jag har mött många motiverade elever som påstår att de har ”glömt hur de skall göra”. Innan jag introducerade *reguladetri* trodde eleverna, både de som gick på ungdomsgymnasiet och de på Komvux, att problemlösning som syftar på procent, index, skala, med mera, endast kunde lösas genom att försöka memorera ett antal färdiga formler och regler som presenterats i läroböckerna. Mina elever uppskattade reguladetri eftersom de på så sätt bättre kunde förstå problemets innehåll i relation till vardagen istället för att koncentrera sig på att komma ihåg olika formler. Detta medförde att eleverna fick bättre självförtroende och ökad motivation för matematik.

Sammanfattningsvis kan man säga att genom att behålla metoden invariant och variera kontexten, så kan eleverna gradvis utvidga metodens tillämpningsområden. Det gör de genom att identifiera relevanta proportioner, och därmed också uppmärksamma likheter och olikheter i olika typer av problemställningar.

LITTERATUR

Hagland, K. (2005). *Rika matematiska problem – inspiration till variation*. Stockholm: Liber.

Marton, F., Runesson, U., & Tsui, A. B. M. (2004). The space of learning. I F. Marton & A. B. M. Tsui (red), *Classroom discourse and the space of learning* (s 3–40). Mahwah: Erlbaum.

Möllehed, E. (1993). *Problemlösning i matematik i grundskollärarutbildningen Nr 3*. Malmö högskola, Utvecklingsavdelningen.

Pólya, G. (1970). *Problemlösning – en handbok i rationellt tänkande*. Stockholm: Prisma.

Skolverket (2009). *Frisläppta uppgifter i matematik från TIMSS Advanced 2008*. Stockholm: Fritzes.

Skolverket. (2003). *Lusten att lära – med fokus på matematik*. Skolverket rapport nr 221. Stockholm: Statens skolverk.

Skoogh, L. & Johansson, H. (1991). Att undervisa i problemlösning. I G. Emanuelsson, B. Johansson & R. Ryding (red), *Problemlösning*, (s 113–129). Lund: Studentlitteratur.

Unenge, J. (1988). *Matematik – didaktik för grundskolan*. Lund: Studentlitteratur.