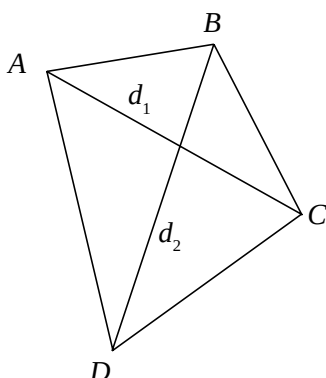


Den mångsidiga fyrhörningen – några uppslag till problemlösning i geometri

*En fyrhörning kan vara ett objekt för mångsidig träning på olika nivåer. **Bengt Ulin**, Bromma, ger några idéer om hur olika matematiska metoder kan utnyttjas för att undersöka vilka former fyrhörningen kan anta beroende på vilka villkor man ställer upp för den.*

Låt oss utgå från två sträckor AC och BD som skär varandra. Om vi sammanbinder sträckornas ändpunkter med varandra får vi en konvex fyrhörning $ABCD$.

Sträckorna bildar dess diagonaler AC och BD , säg d_1 och d_2 (figur 1).



Figur 1

Det kan vara spännande för eleverna att undersöka vad för slags fyrhörningar som uppstår, då vi lägger vissa villkor på diagonalerna.

Tre villkor som ligger nära till hands är

- (I) $d_1 = d_2$ (lika långa diagonaler)
- (II) $d_1 \perp d_2$ (vinkelräta diagonaler)
- (III) d_1 och d_2 halverar varandra

Om vi utgår från alla tre villkoren, finner eleverna snart att fyrhörningen nödvändigtvis blir en kvadrat.

Vi kan därefter fråga: hurdan blir fyrhörningen om vi pålägger diagonalerna villkoren

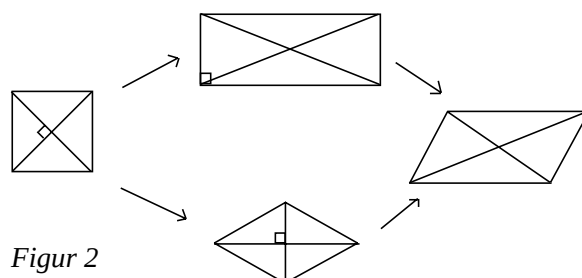
- a) (I) och (III) ?
- b) (II) och (III) ?

Eleverna finner svaren

- a) rektangel (inklusive kvadrat)
- b) romb (inklusive kvadrat)

De kan också lista ut att resultatet blir en parallelogram, om endast förutsättningen (III) gäller.

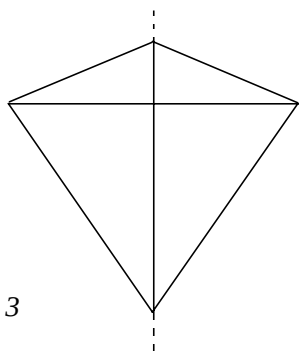
Vi kan sammanfatta denna undersökning i ett schema, som visar två alternativa vägar från kvadraten till parallelogrammen (figur 2). I detta schema blir romb och rektangel i en viss mening motsatta figurer.



Figur 2

Men har vi inte hoppat över ett viktigt steg i vår undersökning? Glömde vi inte att kombinera villkoren (I) och (II)? Borde vi inte ha gjort denna kombination av två villkor, innan vi gick till det fall att endast (III), dvs ett villkor, gäller?

Vilka fyrhörningar ger då kombinationen (I) och (II)? Vi får här betydligt fler möjligheter än i kombinationerna a) respektive b) ovan. Det är särskilt intressant att se efter om vi kan få fyrhörningar med en symmetriaxel. Elevritningarna utvisar att draken kan erhållas, nämligen då den ena diagonalen blir halverad (figur 3).

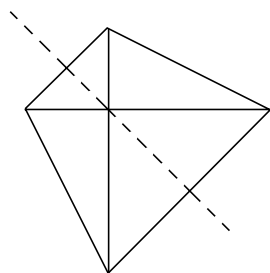


Figur 3

Kan en symmetriaxel uppträda i något annat fall?

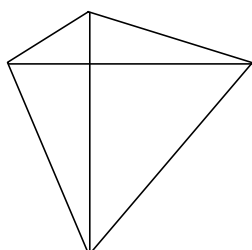
Faktiskt: om diagonalernas skärningspunkt ger lika stora delar på båda diagonalerna. Vi utesluter här att diagonalerna halverar varandra, vilket ju var villkor (III).

Vi får då – av symmetriskäl – en axel, som bildar 45° vinkel med diagonalerna. Fyrhörningen blir ett likbent parallelltrapets (figur 4).



Figur 4

I övrigt ger villkoren (I) och (II) en mängd ”oregelbundna” fyrhörningar (figur 5).



Figur 5

Vi får en intressant variation i fyrhörningarnas form.

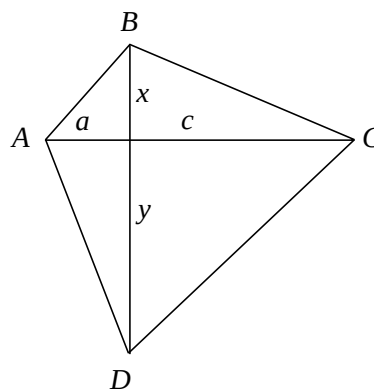
Därmed kunde man tro, att fältet beträffande villkoren (I) och (II) är avbetat. Långtifrån!

Låt oss betrakta mängden av de fyrhörningar som uppfyller villkoren (I) och (II). Vi kan exempelvis ställa följande frågor, då längden hos de lika långa diagonalerna är given, säg p :

1. Hurdan blir fyrhörningen, om de motstående sidorna AB och CD är lika långa?
2. Vad kan vi säga om fyrhörningen, om den kan inskrivas i en cirkel?
3. Vad kan vi säga om $ABCD$, då $ABCD$ kan omskrivas kring en cirkel?
4. För vilken fyrhörning blir omkretsen minimal respektive maximal?
5. För vilken fyrhörning blir arean minimal respektive maximal?

Som vi alla vet, lever vi oss bäst in i de problem som vi ställer och löser eller åtminstone löser själva. Jag unnar den intresserade läsaren/kollegan att göra upptäckter och erfarenheter under sin egen problemlösning och begränsar mig här till några kommentarer, som förhoppningsvis inte skall inkräkta på det självständiga arbetet.

En ganska naturlig start kan vara att utgå från en fix vågrät diagonal $d_1 = AC$, som delas i styckena a och c av diagonalen BD (d_2). Se figur 6.



Figur 6

Vi låter x och y beteckna de delar, i vilka d_2 delas av d_1 .

Vart och ett av problemen 1 – 3 leder till ett ekvationssystem, där den ena ekvationen enligt förutsättning (I) är

$$x + y = a + c.$$

Vid sidan av den triviala lösningen, att fyrhörningen kan vara en kvadrat, finner man trevliga svar i uppgift 1 – 3.

Den som avskyr kvadrattuttryck kan finna stor arbetsglädje genom kvadrering i brottningen med uppgift 2.

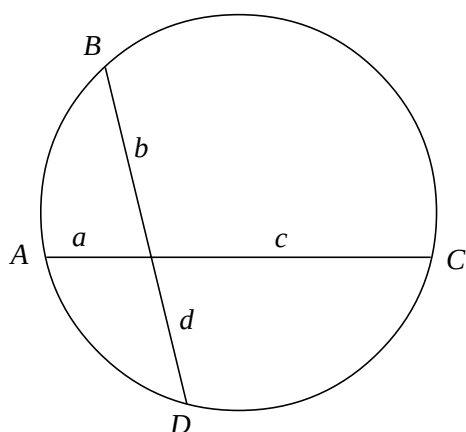
Som biprodukt ger arbetet god repetition och användning av en del grundläggande algebrakunskaper.

Det är inte svårt att hitta problem som anknyter till de ställda uppgifterna. Exempelvis kan man till uppgift 2 associera följande fråga:

Garanterar kordasatsen

$$ac = bd \text{ (figur 7)}$$

att fyrhörningen $ABCD$ kan inskrivas i en cirkel, oavsett om diagonalerna är lika långa eller vinkelräta eller ej?



Figur 7

Med andra ord: om diagonalerna i en fyrhörning delar varandra i bitar $a + c$ respektive $b + d$ så att $ac = bd$, kan fyrhörningen då inskrivas i en cirkel?

Är alltså villkoret $ac = bd$ ett tillräckligt

villkor för existensen av en cirkel som går genom A, B, C och D ? Eller är det bara ett nödvändigt villkor?

Låt oss nu gå till uppgifterna 4 och 5. I den senare uppgiften torde en behaglig överraskning infinna sig rätt snart... Mer behöver inte sägas om den.

Betydligt segare är uppgift 4. Den som gärna hanterar kvadratrötter drar sig inte för att ställa upp omkretsfunktionen

$$z(x, y) = \sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{c^2 + x^2} + \sqrt{a^2 + y^2} + \sqrt{c^2 + y^2}$$

med de beteckningar vi tidigare använt. Eftersom $y = p - x$, övergår vi till en funktion av enbart x :

$$w(x) = f(x) + g(x), \quad \text{_____}$$

$$\text{där } f(x) = \sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{a^2 + (p - x)^2}$$

$$\text{och } g(x) = \sqrt{c^2 + x^2} + \sqrt{c^2 + (p - x)^2}$$

Hur går man nu vidare? Bilda derivatan $w'(x)$ och med dess hjälp söka minimum för w ? I så fall, kan man betrakta komponenterna $f(x)$ och $g(x)$ var för sig? Här krävs ett visst omdöme för att kunna ta sig fram, och troligen är uppgiften mest lämpad som extrauppgift åt duktiga gymnasieelever.

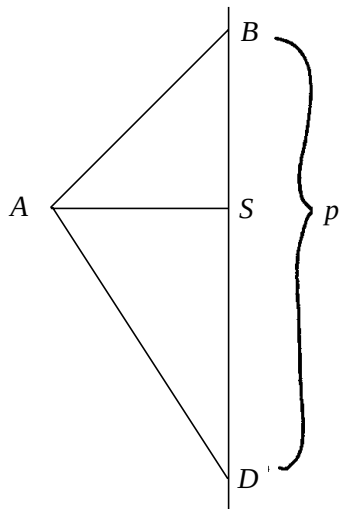
Men åter till lösningsmetoden. Kanske finns det en bra *geometrisk* metod? Om vi vill satsa på det, kan det vara klokt att först gissa sig till vilken figur som ger den minsta omkretsen. Det ligger nära till hands att gissa på kvadraten. En tänkbar väg vore att visa att en förändring från kvadrat till drakform ger en större omkrets och att detsamma inträffar vid varje annan förändring.

Även här krävs omdöme och fantasi som väl endast verkligt duktiga och intresserade elever kan uppbåda.

I god Pólya-stil kan man exempelvis börja med att lösa en något förenklad uppgift (anpassad till vår ursprungsidé att fyrhörningsdiagonalen AC är fixerad i vågrätt läge):

Låt AS vara en fix vågrät sträcka och drag en mot AS vinkelrät linje l . På l låter vi

en sträcka BD med fix längd p glida. För vilket läge hos ändpunkterna B och D blir avståndssumman $BA + AD$ minimal? (figur 8)



Figur 8

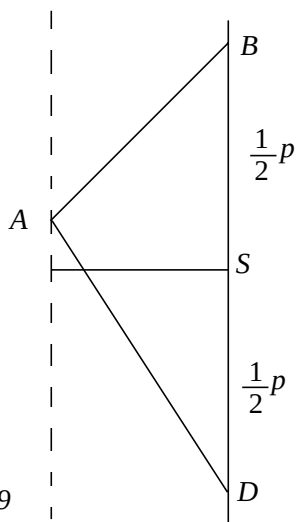
Inträffar minimum för $BS = SD = p/2$? (Detta är väl vad vi förmodar?)

Eftersom vi har föresatt oss att arbeta geometriskt, avstår vi utan suckar från funktioner och derivata, fastän detta kan kännas asketiskt. Måste man ändå inte föra in ett x ? Det finns en lustigare idé: vi prövar med principen om relativitet, fixerar BD i sitt vertikala läge och låter i stället A röra sig på en vertikal parallell till l . (figur 9)

När inträffar minimum för

$BA + AD$?

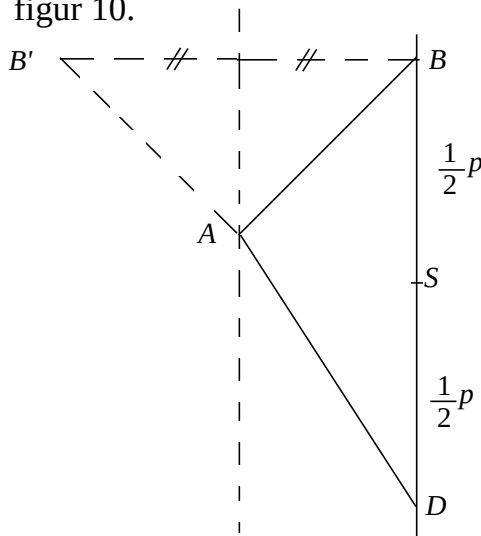
Gissning: då A ligger vågrätt till vänster



Figur 9

om BD s mittpunkt!

Och för att bevisa detta kan vi utnyttja den vackra bevisidé av Heron som illustreras i figur 10.



Figur 10. $BA + AD = B'A'D$ har minimum då $AS \perp BD$. A ligger på linjen $B'D$.

Nu är det bara att utnyttja liknande argument för avståndssumman $AB + BC$ ”i vågrät led” för att nå fram till kvadraten som fyrhörning med minsta omkrets.

Kanske kräver uppgiften angående omkretsens maximala storlek mer fantasi? (Här måste följande undersökas om maximivärdet antas av någon fyrhörning eller om vår klass av fyrhörningar endast har en övre gräns för omkretsen.)

Skulle nu gymnasisterna beta av de fem problemen på relativt kort tid, så finns det – som sagt – tilläggsuppgifter. En sådan kunde vara att undersöka vad som händer med de vunna resultaten, om vi ändrar villkor (II) till att diagonalerna (förutom lika längd enligt (I)) skall skära varandra icke-vinkelrätt. Åtminstone bör då uppgift 4 ta mer tid i anspråk än en frukoststrast.

Den som sätter sig in i de problem som här ställs, märker att svårighetsgraden växlar. De inledande uppgifterna – fram till schemat i figur 2 – kan enligt min erfarenhet ge bra resultat i årskurs 7; detsamma torde gälla uppgift 5. Uppgift 1 – 4 hör säkert hemma på gymnasiestadiet, varvid uppgift 4 bör reserveras för mer intresserade elever.