Att utveckla en problemställning

Lars Mouwitz

Syftet med denna artikel är att beskriva hur ett ganska vanligt matematiskt problem kan utvecklas till en mer omfattande laboration för elever på gymnasienivå. Samtidigt visas hur eleverna i en problemlösningsgrupp har genomfört laborationen och vilken kreativitet och matematisk förmåga de uppvisar i problemlösningsprocessen.

Eleverna deltar läsåret 97/98 i en lokal kurs i matematisk problemlösning som finns på min skola. De följer kursen samtidigt som de läser Matematik B och C. Gruppen består av 30 elever från samhällsprogrammet, ekonomiprogrammet och naturvetenskapsprogrammet. De uppvisar en häpnadsväckande idérikedom och har uppnått resultat långt utöver vad jag trott vara möjligt. En närmare presentation av kursen finns i Nämnaren nr 2, 1995.

Problemet

Det problem som jag använt och här beskriver, har jag sett på olika håll i rent matematisk form. Uppgiften är att dela en godtycklig fyrhörning i fyra lika stora delområden. Delningen skall gå till så att en punkt placeras i fyrhörningen och linjer dras från punkten till de fyra hörnen.

Det märkliga med detta problem är att det saknar lösning för de flesta fyrhörningar. Ett mycket speciellt krav, som jag återkommer till, ställs på fyrhörningen för att delningen ska vara möjlig.

Det ”sunda förnuftet” säger oss kanske att det i princip borde gå att placera ut punkten oberoende av fyrhörningens utseende. De slutsatser man kommer fram till blir alltså kontraintuitiva, och det är just detta som gör problemet utmanande och intressant!

Kontexten

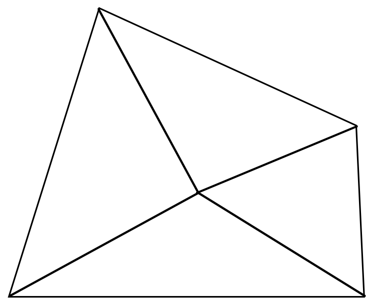
Problemets kontraintuitiva karaktär är i detta fall den främsta drivkraften i det undersökande arbetet. Ändå kändes det väsentligt att problemet också fick en vettig kontext. Efter att ha funderat ett tag på vilka människor som skulle kunna vara intresserade av att dela ett markområde i fyra lika delar kom jag på att biologer ibland sysslar med dylikt, då de ska detaljstudera flora och fauna. Detta blev alltså kontexten, och laborationen fick namnet ”De fyra biologernas problem”.

Många andra kontexter är naturligtvis möjliga, det kan tex vara fråga om ett arvsskifte eller att dela en guldplåt eller liknande. Beroende på elever och situation kan sammanhanget varieras och närvaron av en kontext kan också vara olika väsentlig för olika elever. I mitt fall misstänkte jag att eleverna snabbt skulle lämna kontexten bakom sig och enbart intressera sig för den matematiska aspekten, vilket också blev fallet.

Laborationen

Den laboration som eleverna fick och som de hade två veckor på sig att genomföra och redovisa beskrivs i rutan på nästa sida.

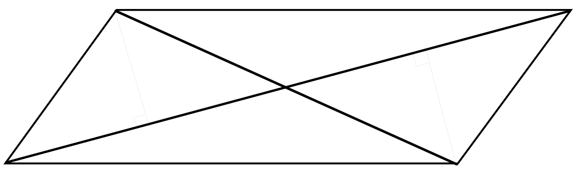
Lars Mouwitz *är adjunkt på Göteborgs Högre Samskola och arbetar inom lärarutbildningen i matematik vid Institutionen för ämnesdidaktik, Göteborgs universitet.*

> ## Laborationen
>
> Fyra biologer ska studera ett fyrkantigt plant område. De vill gärna ha lika stora områden att undersöka. Därför försöker de placera ut en käpp i området på så sätt att fyra snören dragna rätlinjigt från käppen till områdets hörn ska dela området i fyra lika stora delar. Tyvärr så visade sig detta vara tämligen svårt. I figuren nedan visas ett försök att placera ut käppen.
>
> Gör en så fullständig undersökning som möjligt av biologernas problem!
>
> 
>
> *Figur 1*
>
> a) Undersök först enkla fyrhörningar som kvadrater, romber, rektanglar, parallellogrammer och parallelltrapets.
>
> b) Undersök mer oregelbundna fyrhörningar. För vissa sådana är problemet lösbart och för andra inte. Försök att avgöra för vilka det är lösbart och motivera gärna med någon form av bevis.
>
> c) Försök hitta på andra sätt att dela fyrhörningar i fyra lika delar, ju enklare desto bättre. Finns det enkla metoder som fungerar för alla sorters fyrhörningar?
>
> d) Kan det finnas någon enkel indelningsmetod som i princip skulle fungera för alla tänkbara fyrhörningar?

Som synes är laborationen indelad i fyra delfrågor. Den första uppmuntrar ett *undersökande* arbetssätt för att finna mönster och samband. Den andra uppmuntrar *argumentation, troliggörande och bevisföring*. Den tredje ger utrymme för *kreativitet* i valet av nya lösningsstrategier, och den fjärde *generaliserar* problemställningen, vilket ställer nya krav på kunskaper, kreativitet och *abstraktionsförmåga*.

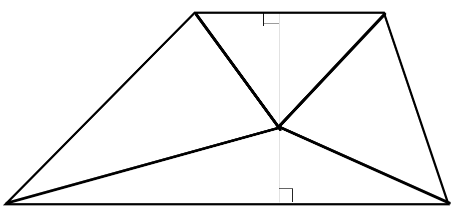
a) Att undersöka enkla fyrhörningar

Denna uppgift är inledningsvis av rent undersökande karaktär. Eleverna kan genom att rita och mäta snabbt övertyga sig om att käppen kan placeras i *diagonalernas skärningspunkt* vad gäller kvadraten, rektangeln, parallellogrammen och romben. En av diagonalerna delar dessa fyrhörningar i två lika delar och den andra diagonalen delar den första mittitu. Vi får då fyra trianglar med lika lång bas resp höjd, och eleverna *bevisade* också lätt att areorna blir lika (se figur 2).



Figur 2

Om eleven varit noggrann i sin undersökning så lägger hon/han märke till att det är något underligt med parallelltrapetsen. Det verkar som om uppgiften inte går att lösa i detta fall! Genom att undersöka många olika parallelltrapets, en del ganska extrema, *troliggör* eleverna att en lösning inte är möjlig. Några elever i gruppen gick ytterligare ett steg och genomförde också ett *bevis*:

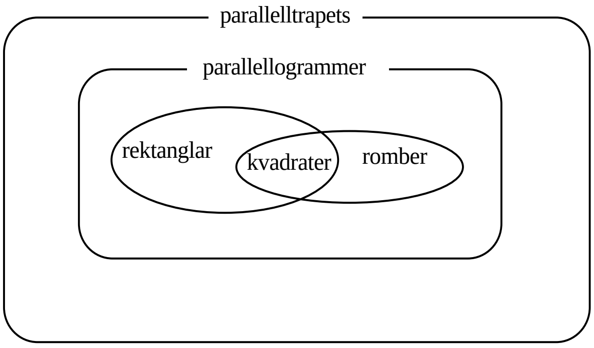


Figur 3

Parallelltrapetsens area är $A = h(a + b)/2$. Varje triangel måste då ha arean $h(a + b)/8$. Vi får då $ah_1/2 = h(a + b)/8$ vilket ger $h_1 = h(a + b)/4a$ och motsvarande för den andra triangeln ger $h_2 = h(a + b)/4b$. Eftersom $h_1 + h_2 = h$ får vi villkoret:

$h(a + b)/4a + h(a + b)/4b = h$ vilket efter förenkling ger $a^2 - 2ab + b^2 = 0$, dvs $(a - b)^2 = 0$ enligt andra kvadreringsregeln.

Vi får alltså villkoret $a = b$, dvs parallelltrapetsen måste vara en parallellogram!



Figur 4

Av detta följer också att då fyrhörningen är en parallelltrapets, där de parallella sidorna är olika långa, så är problemet inte lösbart. Vid den efterföljande diskussionen menade några elever att det var underligt att en parallelltrapets kunde vara en parallellogram, och därför presenterade jag en översikt över det begreppsliga förhållandet mellan våra ”vanliga” fyrhörningar (se figur 4).

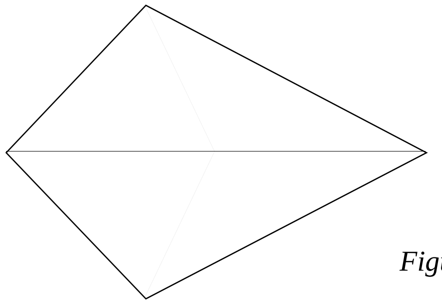
I läroböcker presenteras ofta fyrhörningarna med figurer som om begreppen *uteslöt* varandra. Elever får därför lätt uppfattningen att t ex en rektangel inte kan vara en kvadrat eller att en parallelltrapets inte kan vara en romb. Dessa begreppsliga missförstånd försvårar i hög grad bevisföring och logisk argumentation för eleverna.

Ett annat sätt att hantera beviset ovan är att som inledande villkor sätta $a \neq b$. Beviset får då karaktären av ett *motsägelsebevis*, en vanlig form av matematisk bevisföring.

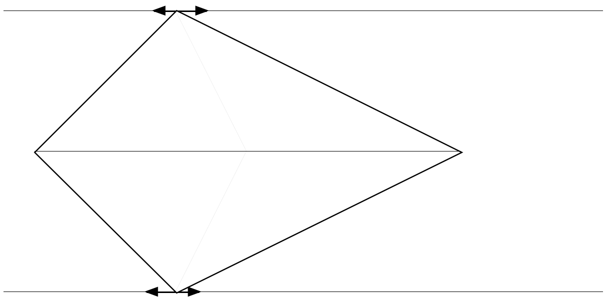
Det undersökande arbetet har alltså lett fram till att vi hittat fyrhörningar där problemet är lösbart, och vi har visat att det inte är det för parallelltrapetsen, då $a \neq b$. Tydligen saknar parallelltrapetsen någon viktig egenskap som de andra har. Men vilken då? Detta leder eleven över till nästa uppgift!

b) Undersök regelbundna fyrhörningar och sök villkor för lösbarhet.

Många elever fann att om fyrhörningen är symmetrisk kring en diagonal så är problemet lösbart. De två halvorna kan även vara speglade. Detta är ju fallet med de ”möjliga” fyrhörningarna som nämnts ovan. Om punkten placeras i en sådan diagonals mittpunkt fås fyra lika stora areor, se figur 5a. Några elever utvecklade den-



Figur 5a



Figur 5b

na argumentation genom att visa att två av fyrhörningens punkter kan flyttas längs linjer parallella med den delande diagonalen, se figur 5b.

Ett *tillräckligt villkor* för att problemet ska vara lösbart är tydligen att en diagonal delar fyrhörningens area mitt itu. Frågan är om det också är ett *nödvändigt villkor*, dvs kan det finnas ”möjliga” fyrhörningar som *inte* uppfyller villkoret ovan?

Nu duger det inte med att försöka undersöka ett stort antal fall, en mer strikt framställning behövs. Några elever tacklade denna problematik genom att först lösa ett *delproblem* för att sedan *dynamiskt* övergå till det generella problemet.

De antar nu att fyrhörningen *inte* har någon diagonal som delar arean mitt itu och löser istället delproblemet $a = b$ och $c = d$, genom att placera punkten P på en diagonals mittpunkt, se figur 6a.

Vi ser att då punkten P ligger *på diagonalen* kan ej de fyra areorna vara lika. För att få alla fyra areorna lika måste vi förflytta punkten P enligt figur. Denna förflyttning innebär att villkoret $a_1 = b_1$ bibehålls, men $c_1 > d_1$ beroende på den streckade arean, se figur 6b.

För att denna streckade area ska vara noll krävs att punkten P ligger på den *andra diagonalen*! Men vi har redan visat att punkten P *inte* kan ligga på diagonalen om denna inte delar arean mittitu. Alltså har vi en motsägelse.

Ett nödvändigt och tillräcklig villkor för att problemet ska vara lösbart är tydligen att fyrhörningen har minst en diagonal som delar dess area i två lika delar! Punkten *P*, dvs käppen, ska då förstås placeras på den delande diagonalens mittpunkt.

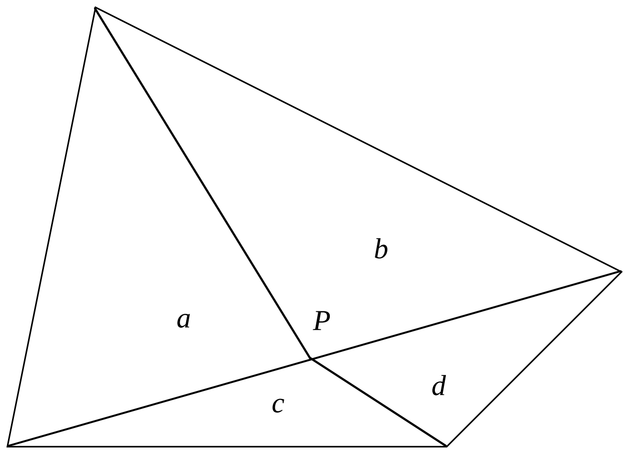
När det nu visar sig att biologernas metod bara fungerar ibland, så kan det vara dags att fundera på om det kan finnas *någon annan* indelningsmetod som vore användbar för alla tänkbara fyrhörningar. Detta leder naturligt över till nästa arbetsuppgift!

c) Försök hitta en annan indelningsmetod som eventuellt fungerar för alla godtyckliga fyrhörningar.

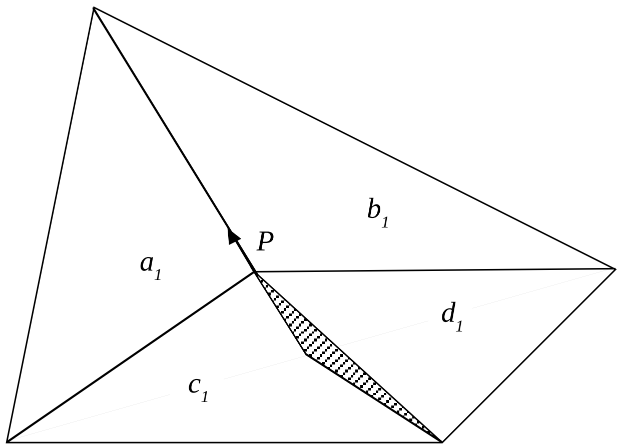
I denna uppgift har eleverna visat prov på mycket stor uppfinningsrikedom. En mängd olika idéer har testats och diskuterats. Här nämner jag bara två, vilka båda kan generaliseras så att fyrhörningen kan indelas i fler än fyra lika stora areor.

Den första metoden bygger på idén att utnyttja likformighet, se figur 7a. Genom att dra diagonalerna och sedan avsätta punkter på dessa kan likformiga figurer ritas. Här kan man använda sig av att längdskalan är roten på areaskalan, och punkternas läge bestäms utifrån diagonalernas skärningspunkt. I praktiken är denna metod lite ”snårig” eftersom beräkningarna innehåller rotuttryck och de områden som bildas blir också lite märkliga. Men områdenas utseende kan eventuellt motiveras utifrån kontexten. Kanske är flora och fauna så beskaffade i området att indelningssättet är önskvärt?

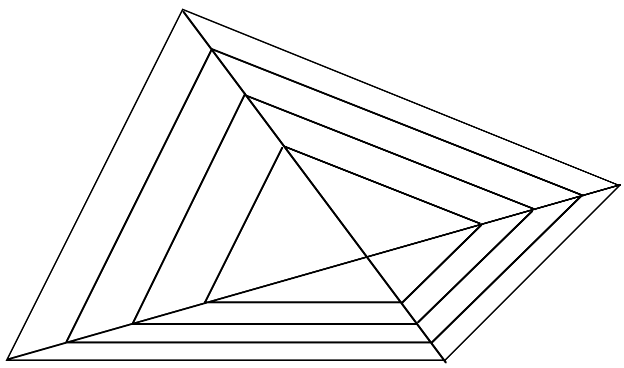
Den andra metoden (se figur 7b) är elegant och också lätt att genomföra i praktiken. Den bygger på det faktum att trianglar som delar höjd och har lika lång bas också har samma area. Detta har eleverna antagligen redan lagt märke till då de arbetat med uppgift b, tidigare insikter kan alltså här användas till att lösa ett *nytt problem*! Som tidigare nämnts kan ju också metoden generaliseras för ett valfritt antal delområden för en godtycklig fyrhörning. Önskas *n* st delområden delas diagonalen bara i *n* st delar!

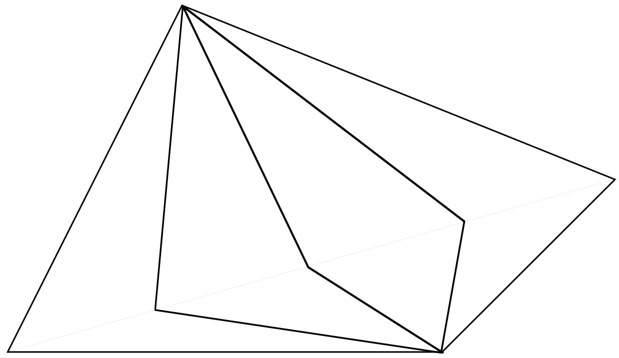


Figur 6a



Figur 6b


Figur 7a


Figur 7b

När vi nu har generaliserat metoden för fyrhörningar, uppstår förstås följdfrågan om det finns enkla metoder för godtyckliga månghörningar. Detta leder naturligt över till nästa uppgift.

d) Kan det finnas någon enkel indelningsmetod som i princip skulle fungera för alla tänkbara månghörningar?
Denna uppgift gav jag mest ”på lek”, för att de snabbaste eleverna skulle få en diger uppgift att tålmodigt sträva med. Själv hade jag ingen aning om huruvida det fanns någon sådan indelningsmetod, men min intuition sade mig att det inte kunde finnas någon.

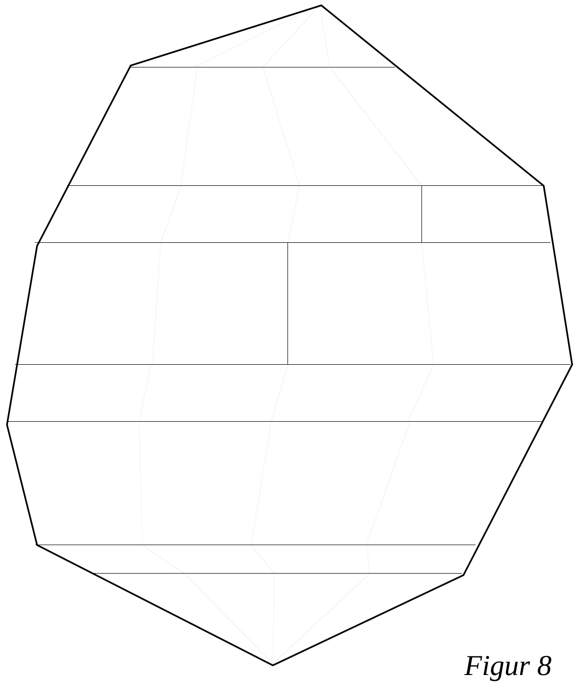
Det finns också en tvetydighet i uppgiften som ger upphov till två problemställningar. Dels kan uppgiften tolkas som att en *n*-hörning ska delas i *n* lika stora delar, dels som att en *n*-hörning ska delas i *m* lika delar. Det visade sig att eleverna även angrep det senare mer generella problemet med stor energi!

Döm om min förvåning när ett antal elever presenterade en genialt enkel metod som fungerar för alla tänkbara konvexa månghörningar och för många konkava! Metoden utgår dels från insikterna om trianglar som delar höjd, dels från den nya idén att ett antal parallelltrapets får samma area om deras höjder resp deras parallella sidor är lika stora, se figur 8.

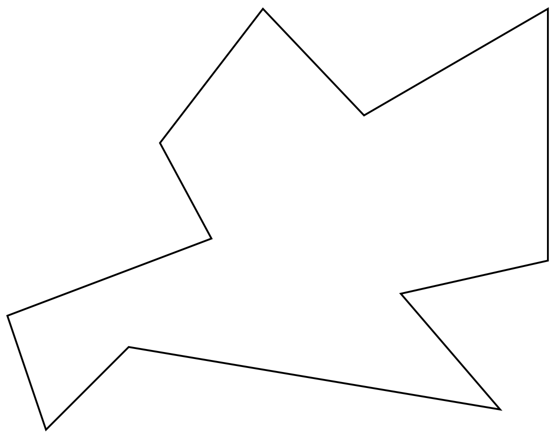
Parallella hjälplinjer dras från *alla* hörn i ”höjdled” (eller sidled) på månghörningen. Hjälplinjerna delas var och en efter det antal delområden som önskas, och sedan dras linjer mellan indelningspunkterna enligt figur. Denna geniala metod ”klarar” som sagt de flesta månghörningar, till min stora förvåning!

Några elever diskuterade också *vilka konkava* månghörningar som metoden klarar, och de kom fram till att hjälplinjerna inte får *skäras* av någon av månghörningens sidor. En elev demonstrerar att det ”finns en del kvar att göra” med figur 9.

Förutom att föreslå en genialt enkel metod som fungerar för de flesta månghörningar utforskar alltså dessa elever också *gränserna* för metodens användning, ett imponerande förhållningssätt!



Figur 8



Figur 9

Utvärdering

Arbetet med en sådan här laboration innebär ett variationsrikt matematiskt kunskapande för eleven, och även för läraren. Här följer några viktig aspekter på ämnet.

Forskande förhållningssätt

Den första uppgiften tränar ett undersökande arbetssätt där man genom exempel söker mönster och samband. Genom att variera exemplen kan man få problemet att ”avslöja sig”, så att man får en bild av vad som ska bevisas. Noggrannhet och systematik är väsentligt vid denna typ av undersökning. En förmodan kan sedan stärkas genom olika former av troliggöranden, men till sist så är det endast beviset som gör att några slutsatser kan dras med full säkerhet. I bevisföringen ingår också att man kan skilja på nödvändiga och tillräckliga villkor, samt att man kan utnyttja olika former av bevis, t ex direkt bevis och motsägelsebevis.

Till det forskande arbetssättet hör också att *utvidga* problematiken så att man börjar utforska nya och angränsande problem. I den utvidgade problematiken är det viktigt att man använder sig av tidigare *delresultat* samt att man söker *generalisera* problemet så långt det är möjligt. Slutligen är det också väsentligt att undersöka *begränsningarna* hos resultaten, dvs man slår fast ett visst *giltighetsområde* för lösningsstrategier och metoder.

Det är min övertygelse att man väcker intresse även för högre matematikstudier i första hand genom att eleverna får utveckla ett forskande förhållningssätt. Ett sådant förhållningssätt kan och bör uppmuntras på ett tidigt stadium i undervisningen och förutsätter inte att eleven först har avancerade färdigheter.

Relation mellan kontext och modell

I vårt exempel är *valet* av indelningsmetod beroende av kontexten, metoden bör ju enligt instruktionen vara enkel att genomföra också i *praktiken*.

Det är också väsentligt att skilja på modell och verklighet. En del elever har svårigheter med detta, de blandar ihop villkoren i den matematiska modellen med empirisk verklighet, vilket gör att de villar bort sig i argumentationen. Framgångsrika elever har oftast en klarare bild av att den matematiska modellen lever sitt eget liv när den väl är konstruerad.

Det är inte heller oproblematiskt *hur* själva modelleringen ska gå till. Från lärarens sida finns ofta en omedveten praxis som kanske inte alls överensstämmer med elevens uppfattning. I ovanstående laboration är modelleringen i stort sett gjord i och med att en *figur* ingår i instruktionen. Ändå fanns ett visst spelrum; en elev sade halvt på allvar halvt på skämt att problemet visst var lösbart för parallelltrapets, det handlar bara om *hur stor man gör käppens diameter*!

Ett problem med modellering är alltså att elever kan göra *olika* modeller vilket leder till *olika* matematiska problem. En del kan då råka göra det lätt för sig, medan andra kommer att brottas med mer avancerade problem.

Det är inte heller oproblematiskt huruvida modelleringen ska uppfattas som en *matematisk* färdighet. En modellering är ju också beroende av teorier om världen och av livserfarenhet, inte bara av ett matematiskt kunnande. Att t ex göra bra matematiska modeller för fysikaliska problem visar väl i första hand att man är bra i *fysik*.

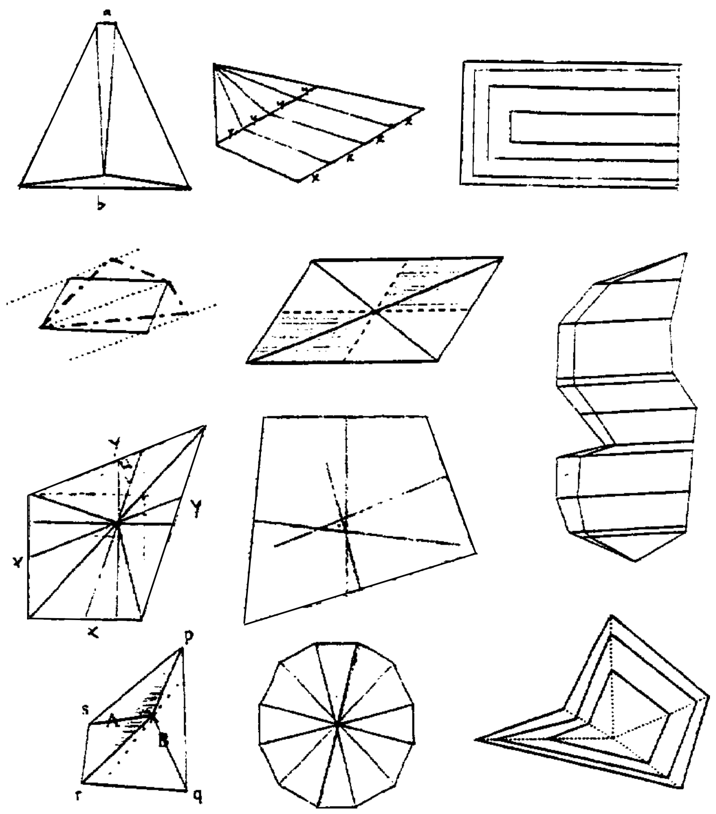
Färdigheter som ingår i kursmålen

Det är mycket tillfredsställande för eleverna att kunna använda sina färdigheter i en större undersökning. Vad gäller ovanstående laboration så kräver den goda kunskaper i elementär geometri. Dessutom måste eleven behärska *algebra* för att kunna genomföra någon form av bevis. Det är också betydelsefullt för eleverna att få se vilket kraftfullt och meningsfullt *redskap* algebra kan vara. I denna laboration är det till exempel viktigt att kunna förenkla algebraiska uttryck och kunna tillämpa en kvadreringsregel ”baklänges”.

I många fall leder arbetet till en fördjupad *begreppsförståelse* och till att eleven får en bättre ”blick” för ämnet, tack vare det intensiva utforskandet av en utmanande problematik.

Muntlig och skriftlig kommunikation

Eleverna utvecklas i att i tal och skrift *diskutera* problem och *argumentera* för sina slutsatser. Många elever har arbetat i grupp och laborationen avslutas också med en gemensam klassrumsdiskussion där olika förslag, strategier och slutsatser tas upp. Tydliga figurer och stringens i den argumenterande framställningen är ett måste och får ett självklart värde som en del av det större arbetet.



Nyttig och meningsfull

I många fall kan det naturligtvis vara lämpligt att utgå från en problematik av påtaglig nyttokaraktär, men rent matematiska utmaningar kan vara minst lika stimulerande och givande för eleverna.

Gång på gång har det ju i matematikens historia visat sig att till synes meningslös ”grundforskning” har fått väsentlig och nyttig tillämpning långt senare.

Det till synes lekfulla och onyttiga kan alltså visa sig vara i högsta grad nyttigt och meningsfullt. Detta är en inte oväsentlig aspekt på matematikämnets karaktär.

Till slut ges här ett litet ”collage” för att ge läsarna en bild av elevernas arbetslust och kreativitet.

Referens

Mouwitz, L. (1995). Lokal kurs i problemlösning. *Nämnaren 22(2)*, 38-44.

Hur räknar vi egentligen?

I samband med vår föreläsning *Hur ska vi räkna?* vid Matematikbiennalen i jan 1998 bad vi om åhörarnas spontana uppfattning av tidsfördelningen när det gäller hjälpmedel i räkning. Ca hälften av besökarna fyllde i en liten enkät med skattning av procentuell tidsfördelning på olika räknehjälpmedel, som de själva som vuxna och som elever i grundskolan lagt ned enligt Lgr 80, se tabell. Enkäten innehöll även skattning av elevernas arbete med Lpo94.

	Vuxen	Lgr 80
Skriftlig beräkning	10	65
Huvudräkning	30	20
Överslag	40	10
Miniräknare	20	5

Medianvärdena (i procent) för bedömningarna från de tre grupperna förskole- och lågstadielärare (19 svar), mellanstadielärare (37) samt högstadielärare (29) ligger nära varandra. Inom grupperna finns dock stora variationer mellan lärare. Som synes används olika hjälpmedel olika mycket utanför (Vuxen) och i skolan (Lgr 80).

När det gäller förväntningar på undervisningen enligt Lpo 94, så utjämnas bedömningarna betydligt. *Skriftlig beräkning* ligger fortfarande främst, på mellanstadiet tillsammans med *huvudräkning* (för båda ca 30%) på högstadiet tillsammans med *miniräknare* (ca 30 %).

Bedömningen ger vid handen att tiden för skriftliga beräkningar i skolan i stort sett kommer att halveras. Huvudräkning, överslagsräkning och miniräknare antas få mera tid, jämn fördelning tror lärare på lågstadiet. Lärare på mellanstadiet ger överslagsräkning och miniräknare, lärare på högstadiet överslagsräkning och huvudräkning lika mycket tid.

Läsarna hälsas välkomna med kommentarer eller frågor.

Göran Emanuelsson & Rolf Hedrén